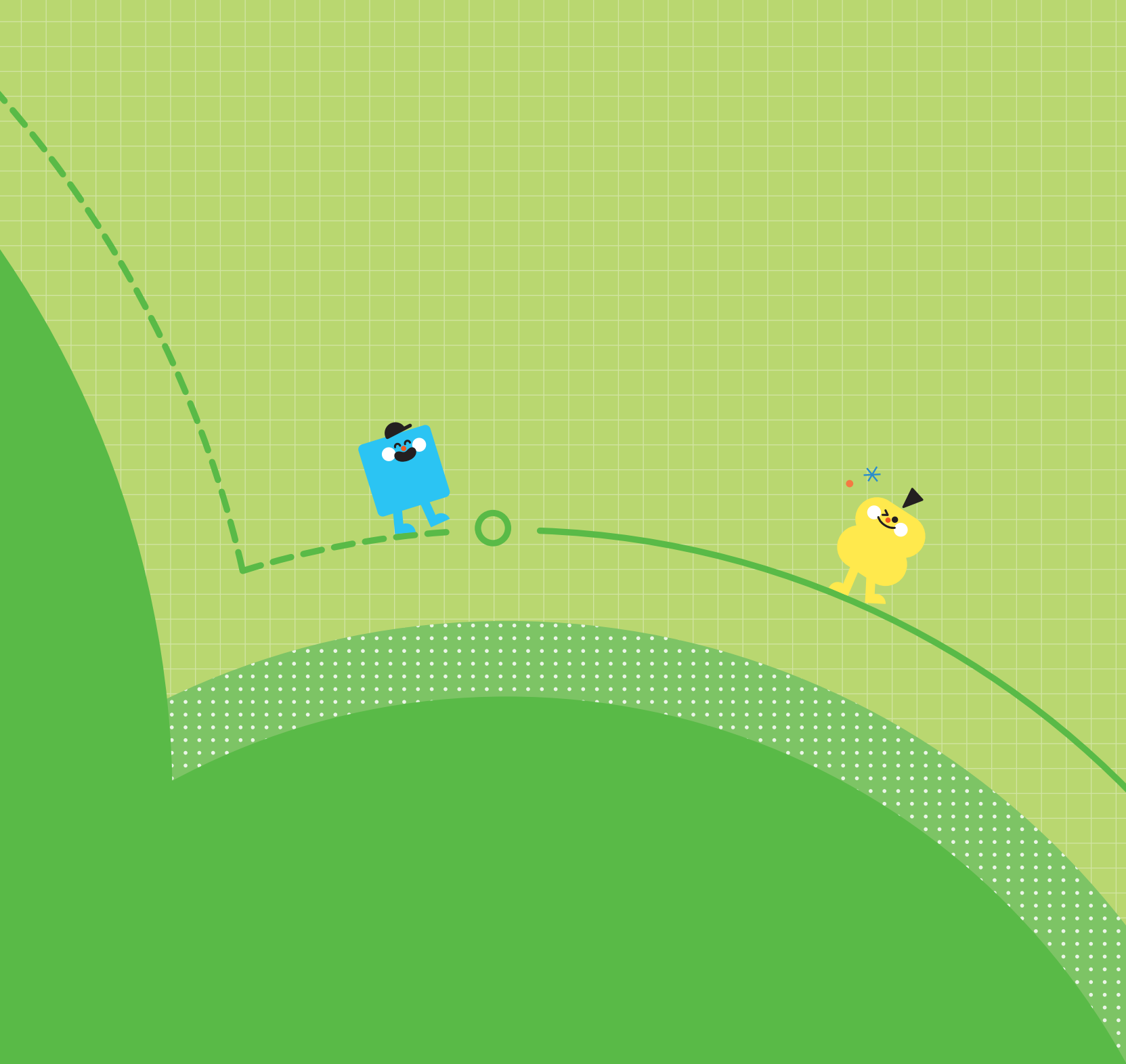




# "수학과와의 지도"

2022 개정 수학과 교육과정의 개정 방향과 교수·학습 및 평가, 교과용 도서의 구성 체제와 활용 방안 등 수학 교과 지도에 필요한 내용을 수록했습니다.



I	2022 개정 수학과 교육과정	10
II	초등학교 수학 교과와 교수·학습 및 평가	52
III	수학과 교과용 도서의 구성 체제와 활용 방안	116
IV	학기별 지도 계획	136
○	참고 문헌	140

## ① 2022 개정 수학과 교육과정

### 교육과정 설계의 개요

총론 교육과정에서는 교육 환경 변화에 대처하고 국가·사회적 요구를 반영하여 미래 사회가 요구하는 ‘포용성과 창의성을 갖춘 주도적인 사람’이라는 인간상을 제시하였다. 또한 학생의 삶과 성장을 지원하며 ‘자기 관리, 지식정보처리, 창의적 사고, 심미적 감성, 협력적 소통, 공동체’ 역량을 중점적으로 기르고, 수리 소양, 디지털 소양, 언어 소양의 기초 소양 함양도 강조하였다. 이에 수학과 교육과정은 총론의 핵심역량과 연계하여 ‘문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리’ 역량을 수학 교과 역량으로 설정하고, 핵심 아이디어와 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도의 세 범주로 내용 체계를 구성하여 수학 교과 역량 함양을 지원하도록 설계하였다. 아울러 기초 소양의 함양과 생태전환 교육, 민주 시민 교육, 학생 맞춤형 교육을 도모하는 교수·학습 및 평가 방법을 제시하였다. 또한 학생 주도성 개념을 바탕으로 학생의 삶과 성장을 지원하고 온라인 교육 환경에서 교수·학습 및 평가를 할 수 있도록 하였다.

수학과 교육과정은 성격, 목표, 내용 체계, 성취기준, 교수·학습, 평가로 구성하였다. ‘성격’에는 수학과와 고유의 특성과 수학 학습의 필요성을 제시하였다. ‘목표’는 총괄 목표와 세부 목표로 구성하였는데, 총괄 목표는 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 통합적으로 학습하여 수학 교과 역량을 함양하는 것으로, 세부 목표는 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리 역량을 각각 함양하는 것으로 설정하였다. ‘내용 체계’는 영역별 핵심 아이디어와 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도의 세 범주로 구성하였다. ‘성취기준’에는 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 학습한 도달점으로 구체적인 성취 내용을 제시하였고, ‘성취기준 해설’과 ‘성취기준 적용 시 고려 사항’에는 성취기준의 취지, 범위 등 수학과 성취기준의 고유한 측면을 해석하고 적용할 때 고려할 수 있는 정보를 제시하였다. ‘교수·학습’과 ‘평가’에는 수학 교과 역량 및 총론의 개정 중점을 반영하여 교수·학습 및 평가의 방향과 방법을 제시하였다.

수학과와 영역은 초·중학교에서 다루는 수학적 대상과 기본적인 개념을 드러내는 ‘수와 연산’, ‘변화와 관계’, ‘도형과 측정’, ‘자료와 가능성’으로 구성하였다. 초·중학교의 영역을 동일하게 설정하여 내용 체계를 구성함으로써 초·중학교를 관통하는 핵심적인 대상과 개념을 학습하도록 하였다. 초·중학교의 4개 영역은 고등학교의 수학 공통 과목이나 선택 과목을 학습하는 데 기초가 되는 내용을 전반적으로 다룬다.

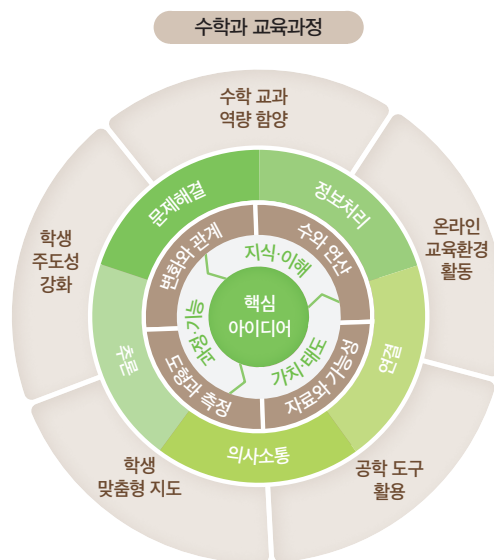
내용 체계에서 핵심 아이디어는 학년(군) 또는 학교급을 관통하는 수학 내용의 본질 또는 가치를 보여 주며, 학생들이 핵심 아이디어를 향한 깊이 있는 학습을 추구하게 하였다. 수학과와 핵심 아이디어는 주요한 수학의 개념, 원리, 법칙 등이 어떻게 발생하고 확장되며 그 결과로 어떤 일반성과 추상성을 획득하는지, 수평적으로 또는 수직적으로 어떻게 상호 관련되는지, 어떤 탐구 과정을 중점적으로 강조하는지 등을 압축하여 제시한 것이다. 핵심 아이디어는 수학 학습 과정에서 전이가 높은 내용을 담은 문장으로 기술하였다.

내용 체계의 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도는 수학 교과 역량을 함양하는 데 필요한 핵심 요

소로 구성하였다. 지식·이해 범주는 수학의 핵심적인 개념, 원리, 법칙 등을 학년(군)별로 구분하여 제시하였다. 초·중학교의 지식·이해 범주는 학년(군)에 따라 위계성을 가지며, 영역 간에도 위계성을 고려하여 구성하였다. 과정·기능 범주는 수학의 개념, 원리, 법칙 등을 학습할 때 5가지 교과 역량이 발휘되는 사고 과정이나 기능을 보여 주도록 구성하였다. 가치·태도 범주는 수학을 학습하면서 학생들이 갖게 되는 태도와 실천적인 성향을 나타낸 것으로, 수학의 가치를 인식하고 수학적 태도를 함양할 수 있게 구성하였다. 내용 체계의 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도는 성취기준 개발의 근거가 된다.

수학 수업을 계획할 때 교육과정을 다음과 같이 활용할 것을 권장한다. 먼저 내용 체계의 ‘핵심 아이디어’를 통해 영역 전체를 아우르거나 관통하는 관점을 파악한다. 다음으로 내용 체계의 ‘지식·이해, 과정·기능, 가치·태도’를 확인하여 중점을 두어야 하는 내용을 확인한다. 이어서 ‘성취기준, 성취기준 해설, 성취기준 적용 시 고려 사항’, ‘교수·학습 및 평가’를 확인하여 세부적인 수업 내용과 방법을 구체화한다. 수업 계획이 성취기준 학습에만 그치지 않고 여러 성취기준을 아우르거나 관통하는 핵심 아이디어를 구성하는 데에 기여하는지 점검하여 보완한다.

수학과 교육과정 설계의 개요를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[수학과 교육과정 설계의 개요]

## 1 성격 및 목표

### 가. 성격

수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다. 수학은 오랜 역사를 통해 인류 문명 발전의 원동력이 되어 왔으며, 세계화·정보화가 가속화되는 미래 사회의 구성원이 지녀야 할 역량을 기르는 데 필수적이다.

초·중학교에서 학습한 수학은 기본적인 삶을 영위하고 일상생활을 포함한 다양한 맥락의 문제를 해결하는 데 도움이 되고, 고등학교 수학뿐만 아니라 여러 교과 학습의 토대가 된다. 수학 학습은 자연과학, 공학, 의학뿐만 아니라 사회과학, 인문학, 예술 및 체육 분야 등 다양한 분야의 직업에서 요구하는 수리 소양을 형성하는 데 기초가 되며, 나아가 미래 사회를 주도할 창의성을 갖춘 사람으로 성장할 수 있는 기반을 제공한다.



학생들은 수학 학습을 통해 수학 지식을 이해하고 수학적 사고 과정과 기능을 형성하며 수학의 가치를 인식하고 바람직한 수학적 태도를 갖추어 수학 교과 역량을 함양할 수 있다. 또한 수학을 학습하는 과정에서 협력하여 문제를 해결하고 성찰하는 경험을 통해 다른 사람에 대한 포용성을 갖춘 민주 시민이자 인간과 환경의 공존 및 지속가능한 발전을 추구하는 세계 공동체의 일원으로 성장할 수 있다.

## 나. 목표

수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학의 가치를 인식하며 바람직한 수학적 태도를 길러 수학적으로 추론하고 의사소통하며 다양한 현상과 연결하여 정보를 처리하고 문제를 창의적으로 해결하는 수학 교과 역량을 함양한다.

- (1) 수학적 지식을 이해하고 활용하여 적극적이고 자신감 있게 여러 가지 문제를 해결한다.
- (2) 수학적 사실에 대해 흥미와 관심을 갖고 추측과 정당화를 통해 추론한다.
- (3) 수학적 사고와 전략에 대해 의사소통하고 수학적 표현의 편리함을 인식한다.
- (4) 수학의 개념, 원리, 법칙 간의 관련성을 탐구하고 실생활이나 타 교과에 수학을 적용하여 수학의 유용성을 인식한다.
- (5) 목적에 맞게 교구나 공학 도구를 활용하며 자료를 수집하고 처리하여 정보에 근거한 합리적 의사 결정을 한다.

## 2 내용 체계 및 성취기준

### 가. 내용 체계

#### (1) 수와 연산

핵심 아이디어		• 사물의 양은 자연수, 분수, 소수 등으로 표현되며, 수는 자연수에서 정수, 유리수, 실수로 확장된다. • 사칙계산은 자연수에 대해 정의되며 정수, 유리수, 실수의 사칙계산으로 확장되고 이때 연산의 성질이 일관되게 성립한다. • 수와 사칙계산은 수학 학습의 기본이 되며, 실생활 문제를 포함한 다양한 문제를 해결하는 데 유용하게 활용된다.					
구분  범주	내용 요소						
	초등학교			중학교			
	1~2학년	3~4학년	5~6학년	1~3학년			
지식·이해		<ul style="list-style-type: none"><li>• 네 자리 이하의 수</li><li>• 두 자리 수 범위의 덧셈과 뺄셈</li><li>• 한 자리 수의 곱셈</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• 다섯 자리 이상의 수</li><li>• 분수</li><li>• 소수</li><li>• 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈</li><li>• 자연수의 곱셈과 나눗셈</li><li>• 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈</li><li>• 소수의 덧셈과 뺄셈</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• 약수와 배수</li><li>• 수의 범위와 올림, 버림, 반올림</li><li>• 자연수의 혼합 계산</li><li>• 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈</li><li>• 분수의 곱셈과 나눗셈</li><li>• 소수의 곱셈과 나눗셈</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• 소인수분해</li><li>• 정수와 유리수</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• 유리수와 순환소수</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• 제곱근과 실수</li></ul>

과정·기능	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 자연수, 분수, 소수 등 수 관련 개념과 원리를 탐구하기</li> <li>• 수를 세고 읽고 쓰기</li> <li>• 자연수, 분수, 소수의 크기를 비교하고 그 방법을 설명하기</li> <li>• 사칙계산의 의미와 계산 원리를 탐구하고 계산하기</li> <li>• 수 감각과 연산 감각 기르기</li> <li>• 연산 사이의 관계, 분수와 소수의 관계를 탐구하기</li> <li>• 수의 범위와 올림, 버림, 반올림한 어림값을 실생활과 연결하기</li> <li>• 자연수, 분수, 소수, 사칙계산을 실생활 및 타 교과와 연결하여 문제해결하기</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 최대공약수와 최소공배수 구하기</li> <li>• 정수, 유리수, 실수의 대소 관계 판단하기</li> <li>• 정수, 유리수, 근호를 포함한 식의 사칙계산의 원리를 탐구하고 계산하기</li> <li>• 유리수와 순환소수의 관계 설명하기</li> </ul>
가치·태도	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 자연수, 분수, 소수의 필요성 인식</li> <li>• 사칙계산, 어림의 유용성 인식</li> <li>• 분수 표현의 편리함 인식</li> <li>• 수와 연산 관련 문제해결에서 비판적으로 사고하는 태도</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 음수, 무리수의 필요성 인식</li> <li>• 실생활에서 사칙계산의 유용성 인식</li> <li>• 수 체계의 논리적 아름다움에 대한 관심</li> <li>• 정수와 유리수의 사칙계산의 원리를 이용하는 문제의 풀이 과정과 결과를 반성하는 태도</li> </ul>

## (2) 변화와 관계

핵심 아이디어	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 변화하는 현상에 반복적인 요소로 들어있는 규칙은 수나 식으로 표현될 수 있으며, 규칙을 탐구하는 것은 수학적으로 추측하고 일반화하는 데 기반이 된다.</li> <li>• 동치 관계, 대응 관계, 비례 관계 등은 여러 현상에 들어있는 대상들 사이의 다양한 관계를 기술하고 복잡한 문제를 해결하는 데 유용하게 활용된다.</li> <li>• 수와 그 계산은 문자와 식을 사용하여 일반화되며, 특정한 관계를 만족시키는 미지의 값은 방정식과 부등식을 해결하는 적절한 절차를 거쳐 구해진다.</li> <li>• 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계를 나타내는 함수와 그 그래프는 변화하는 현상 속의 다양한 관계를 수학적으로 표현한다.</li> </ul>					
범주	내용 요소					
	초등학교			중학교		
	1~2학년	3~4학년	5~6학년	1~3학년		
지식·이해	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 규칙</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 규칙</li> <li>• 동치 관계</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 대응 관계</li> <li>• 비와 비율</li> <li>• 비례식과 비례배분</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 문자의 사용과 식</li> <li>• 일차방정식</li> <li>• 좌표평면과 그래프</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 식의 계산</li> <li>• 일차부등식</li> <li>• 연립일차방정식</li> <li>• 일차함수와 그 그래프</li> <li>• 일차함수와 일차방정식의 관계</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 다항식의 곱셈과 인수분해</li> <li>• 이차방정식</li> <li>• 이차함수와 그 그래프</li> </ul>

과정·기능	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 물체, 무늬, 수, 계산식의 배열에서 규칙을 탐구하기</li> <li>• 규칙을 찾아 여러 가지 방법으로 표현하기</li> <li>• 두 양의 관계를 탐구하고, 등호를 사용하여 나타내기</li> <li>• 대응 관계를 탐구하고, □, △ 등을 사용하여 식으로 나타내고 설명하기</li> <li>• 두 양의 관계를 비나 비율로 나타내기</li> <li>• 비율을 분수, 소수, 백분율로 나타내기</li> <li>• 비율을 실생활 및 타 교과와 연결하여 문제해결하기</li> <li>• 비례식을 풀고, 주어진 양을 비례배분하기</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 식의 값과 함숫값 구하기</li> <li>• 다항식의 연산 원리에 따라 계산하기</li> <li>• 식을 간단히 하기</li> <li>• 등식의 성질과 부등식의 성질 설명하기</li> <li>• 방정식과 부등식 풀기</li> <li>• 방정식, 부등식, 함수와 관련된 문제해결하기</li> <li>• 상황이나 관계를 표, 식, 그래프로 나타내기</li> <li>• 주어진 그래프 해석하기</li> <li>• 일차함수의 그래프와 이차함수의 그래프의 성질 설명하기</li> <li>• 일차함수의 그래프와 미지수가 2개인 일차방정식의 해 사이의 관계 설명하기</li> </ul>
가치·태도	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 규칙, 동치 관계 탐구에 대한 흥미</li> <li>• 대응 관계, 비 표현의 편리함 인식</li> <li>• 비와 비율의 유용성 인식</li> <li>• 변화와 관계 관련 문제해결에서 비판적으로 사고하는 태도</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 문자의 유용성 인식</li> <li>• 순서쌍과 좌표, 그래프 등 수학적 표현의 유용성과 편리함 인식</li> <li>• 방정식, 부등식, 함수의 필요성 인식</li> <li>• 실생활, 사회 및 자연 현상과 관련된 문제를 수학적 모델링을 통해 해결하려는 도전적인 태도</li> <li>• 체계적으로 사고하여 합리적으로 의사 결정하는 태도</li> <li>• 타당한 근거에 따라 논리적으로 설명하는 태도</li> </ul>

### (3) 도형과 측정

핵심 아이디어	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 평면도형과 입체도형은 여러 가지 모양을 범주화한 것이며, 각각의 평면도형과 입체도형은 고유한 성질을 갖는다.</li> <li>• 도형의 성질과 관계를 탐구하고 정당화하는 것은 논리적이고 비판적으로 사고하는 데 기반이 된다.</li> <li>• 측정은 여러 가지 속성의 양을 비교하고 속성에 따른 단위를 이용하여 양을 수치화함으로써 여러 가지 현상을 해석하거나 실생활 문제를 해결하는 데 활용된다.</li> </ul>					
구분  범주	내용 요소					
	초등학교			중학교		
	1~2학년	3~4학년	5~6학년	1~3학년		
지식·이해	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 입체도형의 모양</li> <li>• 평면도형과 그 구성 요소</li> <li>• 양의 비교</li> <li>• 시각과 시간 (시, 분)</li> <li>• 길이(cm, m)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 도형의 기초</li> <li>• 원의 구성 요소</li> <li>• 여러 가지 삼각형</li> <li>• 여러 가지 사각형</li> <li>• 다각형</li> <li>• 평면도형의 이동</li> <li>• 시각과 시간(초)</li> <li>• 길이(mm, km)</li> <li>• 둘이(L, mL)</li> <li>• 무게(kg, g, t)</li> <li>• 각도(°)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 합동과 대칭</li> <li>• 직육면체와 정육면체</li> <li>• 각기둥과 각뿔</li> <li>• 원기둥, 원뿔, 구</li> <li>• 다각형의 둘레와 넓이</li> <li>• 원주율과 원의 넓이</li> <li>• 직육면체와 정육면체의 겉넓이와 부피</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 기본 도형</li> <li>• 작도와 합동</li> <li>• 평면도형의 성질</li> <li>• 입체도형의 성질</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 삼각형과 사각형의 성질</li> <li>• 도형의 닮음</li> <li>• 피타고라스 정리</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 삼각비</li> <li>• 원의 성질</li> </ul>

과정·기능	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 여러 가지 사물과 도형을 기준에 따라 분류하기</li> <li>• 도형의 개념, 구성 요소, 성질 탐구하고 설명하기</li> <li>• 평면도형이나 입체도형 그리기와 만들기</li> <li>• 평면도형을 밀기, 뒤집기, 돌리기 한 모양을 추측하고 그리기</li> <li>• 쌓은 모양 추측하고 쌓기나무의 개수 구하기</li> <li>• 공간 감각 기르기</li> <li>• 여러 가지 양을 비교, 측정, 어림하는 방법 탐구하기</li> <li>• 측정 단위 사이의 관계 탐구하기</li> <li>• 측정 단위를 사용하여 양을 표현하기</li> <li>• 실생활 문제 상황에서 길이, 둘레, 무게, 시간의 덧셈과 뺄셈하기</li> <li>• 도형의 둘레, 넓이, 부피 구하는 방법 탐구하기</li> <li>• 측정을 실생활 및 타 교과와 연결하여 문제해결하기</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 점, 직선, 평면의 위치 관계를 다양한 상황과 연결하기</li> <li>• 도형의 성질 설명하기</li> <li>• 삼각형의 작도 과정 설명하기</li> <li>• 삼각형의 합동과 닮음 판별하기</li> <li>• 도형의 길이, 넓이, 겹넓이, 부피 구하기</li> <li>• 구체적인 모형이나 공학 도구 이용하기</li> <li>• 도형의 성질을 정당화하기</li> <li>• 닮음비 구하기</li> <li>• 간단한 삼각비의 값 구하기</li> <li>• 삼각비를 활용하여 문제해결하기</li> </ul>
가치·태도	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 평면도형, 입체도형에 대한 흥미와 관심</li> <li>• 합동인 도형, 선대칭도형, 점대칭도형의 아름다움 인식</li> <li>• 표준 단위의 필요성 인식</li> <li>• 넓이와 부피를 구하는 방법의 편리함 인식</li> <li>• 도형과 측정 관련 문제해결에서 비판적으로 사고하는 태도</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 증명의 필요성 인식</li> <li>• 피타고라스 정리, 삼각비의 유용성 인식</li> <li>• 피타고라스 정리, 삼각비에 대한 흥미와 관심</li> <li>• 도형의 성질을 이용한 건축물, 문화유산, 예술 작품에 대한 흥미와 관심</li> <li>• 다양한 정당화 방법을 이용하여 체계적으로 사고하고 타인을 합리적으로 설득하려는 태도</li> <li>• 정당화를 통해 수학적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도</li> </ul>

#### (4) 자료와 가능성

핵심 아이디어	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 자료를 수집, 정리, 해석하는 통계는 자료의 특징을 파악하고 두 집단을 비교하며 자료의 관계를 탐구하는 데 활용된다.</li> <li>• 사건이 일어날 가능성을 여러 가지 방법으로 표현하는 것은 불확실성을 이해하는 데 도움이 되며, 가능성을 확률로 수치화하면 불확실성을 수학적으로 다룰 수 있게 된다.</li> <li>• 자료를 이용하여 통계적 문제해결 과정을 실천하고 생활 속의 가능성을 탐구하는 것은 미래를 예측하고 합리적인 의사 결정을 하는 데 기반이 된다.</li> </ul>					
범주	내용 요소					
	초등학교			중학교		
	1~2학년	3~4학년	5~6학년	1~3학년		
지식·이해	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 자료의 분류</li> <li>• 표</li> <li>• ○, ×, /를 이용한 그래프</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 그림그래프</li> <li>• 막대그래프</li> <li>• 꺾은선그래프</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 평균</li> <li>• 띠그래프, 원그래프</li> <li>• 가능성</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 대푯값</li> <li>• 도수분포표와 상대도수</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 경우의 수와 확률</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 산포도</li> <li>• 상자그림과 산점도</li> </ul>
과정·기능	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 자료를 기준에 따라 분류하고 설명하기</li> <li>• 탐구 문제를 설정하고 그에 맞는 자료를 수집하기</li> <li>• 자료를 표나 그래프로 나타내고 해석하기</li> <li>• 자료의 평균을 구하고 해석하기</li> <li>• 자료를 수집하고 정리하여 문제해결하기</li> <li>• 사건이 일어날 가능성을 비교하고 표현하기</li> <li>• 실생활과 연결하여 사건이 일어날 가능성을 예상하기</li> </ul>			<ul style="list-style-type: none"> <li>• 적절한 대푯값을 선택하여 구하기</li> <li>• 자료를 표, 그래프로 나타내고 해석하기</li> <li>• 통계적 탐구 문제 설정하기</li> <li>• 공학 도구를 이용하여 자료를 수집하고 분석하기</li> <li>• 확률의 기본 성질 탐구하기</li> <li>• 자료의 분포를 비교하고 설명하기</li> <li>• 자료의 상관관계 설명하기</li> </ul>		
가치·태도	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 표와 그래프의 편리함 인식</li> <li>• 평균의 유용성 인식</li> <li>• 자료를 이용한 통계적 문제해결 과정의 가치 인식</li> <li>• 가능성에 근거하여 판단하는 태도</li> <li>• 자료와 가능성 관련 문제해결에서 비판적으로 사고하는 태도</li> </ul>			<ul style="list-style-type: none"> <li>• 대푯값, 상대도수, 상자그림의 유용성 인식</li> <li>• 공학 도구를 이용한 자료 수집과 분석의 편리함과 유용성 인식</li> <li>• 자신의 삶과 연계된 확률과 통계에 대한 흥미와 관심</li> <li>• 통계적 문제해결 과정에 주도적으로 참여하는 태도</li> <li>• 체계적으로 사고하여 합리적으로 의사 결정하는 태도</li> <li>• 확률 및 통계적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도</li> </ul>		

## 나. 성취기준

### [초등학교 1~2학년]

#### (1) 수와 연산

##### ㉠ 네 자리 이하의 수

- [2수01-01] 수의 필요성을 인식하면서 0과 100까지의 수 개념을 이해하고, 수를 세고 읽고 쓸 수 있다.
- [2수01-02] 일, 십, 백, 천의 자릿값과 위치적 기수법을 이해하고, 네 자리 이하의 수를 읽고 쓸 수 있다.
- [2수01-03] 네 자리 이하의 수의 범위에서 수의 계열을 이해하고, 수의 크기를 비교할 수 있다.
- [2수01-04] 하나의 수를 두 수로 분해하고 두 수를 하나의 수로 합성하는 활동을 통하여 수 감각을 기른다.

##### ㉡ 두 자리 수 범위의 덧셈과 뺄셈

- [2수01-05] 덧셈과 뺄셈이 이루어지는 실생활 상황과 연결하여 덧셈과 뺄셈의 의미를 이해한다.
- [2수01-06] 두 자리 수의 범위에서 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.
- [2수01-07] 덧셈과 뺄셈의 관계를 이해한다.
- [2수01-08] 두 자리 수의 범위에서 세 수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.
- [2수01-09] □가 사용된 덧셈식과 뺄셈식을 만들고, □의 값을 구할 수 있다.

##### ㉢ 한 자리 수의 곱셈

- [2수01-10] 곱셈이 이루어지는 실생활 상황과 연결하여 곱셈의 의미를 이해한다.
- [2수01-11] 곱셈구구를 이해하고, 한 자리 수의 곱셈을 할 수 있다.

#### (가) 성취기준 해설

- [2수01-06] 덧셈은 두 자리 수의 범위에서 다루되, 합이 세 자리 수인 경우도 포함한다.

#### (나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- ‘수와 연산’ 영역에서는 용어와 기호로 ‘덧셈, 뺄셈, 곱셈, 짝수, 홀수, +, -, ×, =, >, <’를 다룬다.
- 자연수가 개수, 순서, 이름 등을 나타내는 경우가 있음을 알고, 실생활에서 수가 사용되는 사례를 통하여 네 자리 이하의 수의 필요성을 인식하게 한다.
- 두 자리 수를 10개씩 묶음과 낱개로 나타내게 함으로써 위치적 기수법의 기초 개념을 형성하게 한다.
- 저학년 학생들의 한글 학습 정도를 고려하여 수를 ‘여덟’, ‘마흔아홉’, ‘칠십육’, ‘첫째’ 등과 같이 한글로 쓰게 하는 것은 지양한다.
- 수 세기가 필요한 장면에서 묶어 세기, 뛰어 세기의 방법으로 수를 세어 보게 한다.
- 짝수와 홀수는 20 이하의 수의 범위에서 다루고, 실생활 상황에서 돌씩 묶어 보는 활동을 통하여 짝수와 홀수를 직관적으로 이해하게 한다.
- 십의 자리 수가 0인 세 자리 수, 백의 자리 수나 십의 자리 수가 0인 네 자리 수를 활용하여 자릿값을 이해하게 할 수 있다.
- 수를 분해하고 합성하는 활동은 20 이하의 수의 범위에서 한다.
- ‘~보다 ~만큼 더 큰 수’, ‘~보다 ~만큼 더 작은 수’, ‘더한다’, ‘합한다’, ‘뺀다’, ‘덜어 낸다’, ‘합’, ‘차’ 등의 일상용어를 사용하여 덧셈과 뺄셈의 의미에 친숙하게 한다.
- 한 자리 수인 두 수를 바꾸어 더해 보고 그 결과를 비교하는 활동을 통하여 덧셈의 교환법칙을 직관적으로 이해하게 한다.

- 덧셈과 뺄셈을 여러 가지 방법으로 계산하는 활동을 통하여 연산 감각을 기르게 하되, 이를 지나치게 형식화하여 다루지 않는다.
- 학생들에게 친근한 실생활 상황을 이용하여 덧셈과 뺄셈에 관련된 문제를 만들고 해결하게 한다.
- 덧셈식, 뺄셈식, 곱셈식에서 등호(=)의 양쪽에 있는 양이 서로 같음을 이해하게 한다.
- 한 가지 상황을 간단한 덧셈식과 뺄셈식으로 나타내는 활동을 통하여 덧셈과 뺄셈의 관계를 이해하게 한다.
- 세 수의 덧셈에서는 세 수를 앞에서부터 순서대로 더한 결과와 합이 10이 되는 두 수를 먼저 더하고 나머지 수를 더한 결과를 비교하는 활동을 통하여 덧셈의 결합법칙을 직관적으로 이해하게 한다.
- □가 사용된 덧셈식과 뺄셈식은 □의 값을 직관적으로 구할 수 있는 수준으로 다룬다.
- 곱셈의 의미는 배의 개념과 동수누가를 통하여 다루고, 1의 곱과 0의 곱은 실생활과 관련지어 다룬다.
- 곱셈표를 이용해서 두 수를 바꾸어 곱해도 곱이 같음을 비교하는 활동을 통하여 곱셈의 교환법칙을 직관적으로 이해하게 한다.
- ‘수와 연산’ 영역의 문제 상황에 적합한 문제해결 전략을 지도하여 문제해결 역량을 기르게 한다.

## (2) 변화와 관계

### ① 규칙 찾기

[2수02-01] 물체, 무늬, 수 등의 배열에서 규칙을 찾아 여러 가지 방법으로 표현할 수 있다.

[2수02-02] 자신이 정한 규칙에 따라 물체, 무늬, 수 등을 배열할 수 있다.

### (가) 성취기준 해설

- [2수02-01] 물체, 무늬, 수 등의 배열을 관찰하여 일정하게 반복되거나 증가하는 규칙을 찾고 말, 수, 그림, 기호, 구체물, 행동 등의 다양한 방법으로 표현하게 한다. 그리고 물체, 무늬, 수의 배열에서 다음에 올 것이나 중간에 빠진 것을 추측하게 한다.

### (나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- 학생이 스스로 만든 규칙에 따라 물체, 무늬, 수 등을 배열하는 활동을 통해 수학에 대한 흥미를 느끼게 할 수 있다.
- 수의 배열뿐만 아니라 수 배열표, 덧셈표, 곱셈표를 활용하여 수의 다양한 규칙을 찾게 한다.
- 물체, 무늬, 수 등의 배열에서는 크기, 색깔, 위치, 순서 등에 대한 단순한 규칙을 다루고, 지나치게 복잡한 배열에 대한 평가는 지양한다.
- 다른 사람의 배열에서 규칙을 찾아보거나 규칙에 대해 서로 말하게 한다.
- ‘변화와 관계’ 영역의 문제 상황에 적합한 문제해결 전략을 지도하여 문제해결 역량을 기르게 한다.

### (3) 도형과 측정

#### ① 입체도형의 모양

- [2수03-01] 교실 및 생활 주변에서 여러 가지 물건을 관찰하여 직육면체, 원기둥, 구의 모양을 찾고, 이를 이용하여 여러 가지 모양을 만들 수 있다.
- [2수03-02] 쌓기나무를 이용하여 여러 가지 입체도형의 모양을 만들고, 그 모양에 대해 위치나 방향을 이용하여 말할 수 있다.

#### ② 평면도형과 그 구성 요소

- [2수03-03] 교실 및 생활 주변에서 여러 가지 물건을 관찰하여 삼각형, 사각형, 원의 모양을 찾고, 이를 이용하여 여러 가지 모양을 만들 수 있다.
- [2수03-04] 삼각형, 사각형, 원을 직관적으로 이해하고, 그 모양을 그릴 수 있다.
- [2수03-05] 삼각형, 사각형에서 각각의 공통점을 찾아 말할 수 있다.

#### ③ 양의 비교

- [2수03-06] 구체물의 길이, 높이, 무게, 넓이를 비교하여 각각 '길다, 짧다', '많다, 적다', '무겁다, 가볍다', '넓다, 좁다' 등을 구별하여 말할 수 있다.

#### ④ 시각과 시간

- [2수03-07] 시계를 보고 시각을 '몇 시 몇 분'까지 읽을 수 있다.
- [2수03-08] 1시간과 1분의 관계를 이해하고, 시간을 '시간', '분'으로 표현할 수 있다.
- [2수03-09] 실생활 문제 상황과 연결하여 1분, 1시간, 1일, 1주일, 1개월, 1년 사이의 관계를 이해한다.

#### ⑤ 길이

- [2수03-10] 길이 단위 1 cm와 1 m를 알고, 이를 이용하여 주변 사물의 길이를 측정할 수 있다.
- [2수03-11] 1 m와 1 cm의 관계를 이해하고, 길이를 '몇 m 몇 cm'와 '몇 cm'로 표현할 수 있다.
- [2수03-12] 여러 가지 물건의 길이를 어렵게 보고, 길이에 대한 양감을 기른다.
- [2수03-13] 실생활 문제 상황과 연결하여 길이의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

### (가) 성취기준 해설

- [2수03-02] 쌓기나무로 만든 입체도형의 모양에 대해서 '~의 앞', '~의 오른쪽', '~의 위', '2층' 등을 사용하여 말하게 한다.
- [2수03-04] 삼각형, 사각형, 원은 예인 것과 예가 아닌 것을 분류하는 활동을 통하여 직관적으로 이해하게 한다. 본뜨기, 도형판을 이용한 활동 등을 통해 삼각형, 사각형, 원의 모양을 그리게 할 수 있다.
- [2수03-10] 길이의 표준 단위를 도입하기 전에 구체물을 직접 비교해 보거나 여러 가지 임의 단위를 사용하여 구체물의 길이를 재어보는 활동을 통해 표준 단위의 필요성을 알게 한다.
- [2수03-12] 생활 주변의 여러 가지 물건들의 길이를 어렵게 보고 자로 측정하여 확인하는 활동과 주어진 길이에 해당하는 선분을 그려 보는 활동을 통해 길이에 대한 양감을 기르게 한다.

### (나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- '도형과 측정' 영역에서는 용어와 기호로 '삼각형, 사각형, 원, 꼭짓점, 변, 시, 분, 약, cm, m'를 다룬다.
- 입체도형과 평면도형의 모양을 다룰 때 모양의 특징을 직관적으로 파악하여 모양을 분류하고, 분류한 모양을 지칭하기 위해 일상용어를 사용하게 할 수 있다.
- 입체도형과 평면도형의 모양을 이용한 모양 만들기의 주제는 학생들에게 친근한 소재인 동물, 탈 것, 건물 등으로 다양하게 제시하여 수학에 대한 흥미와 관심을 갖게 한다.



- 쌓기나무, 칠교판 등의 구체물을 이용한 모양 만들기를 통하여 도형에 대한 공간 감각을 기르게 한다.
- 양의 비교는 학생들에게 친근한 실생활 상황을 이용하고, 직관적인 비교, 직접 비교, 간접 비교 등을 상황에 따라 알맞게 다룬다.
- 저학년 학생들의 한글 학습 정도를 고려하여 양을 비교할 때 ‘짧다’, ‘많다’, ‘넓다’ 등과 같이 한글로 쓰게 하는 것은 지양한다.
- 학생들이 모형 시계를 조작하여 ‘몇 시’, ‘몇 시 30분’, ‘몇 시 몇 분’, ‘몇 시 몇 분 전’ 등의 시각을 읽게 한다.
- ‘몇 시 몇 분 전’의 시각 읽기에서 5분 전, 10분 전과 같이 간단한 경우를 다루고, 13분 전과 같이 복잡한 경우는 다루지 않는다.
- 시간의 여러 가지 단위를 지도할 때는 단위 사이의 관계를 이해하는 데 중점을 두고, 지나친 단위 환산은 다루지 않는다.
- 1일, 1주일, 1개월, 1년 사이의 관계를 지도할 때는 실생활 상황에서 달력을 이용하여 그 관계를 이해하게 한다.
- 구체물의 길이를 재는 과정에서 자의 눈금과 일치하지 않는 길이의 측정값을 ‘약’으로 표현할 수 있음을 알게 한다.
- ‘도형과 측정’ 영역의 문제 상황에 적합한 문제해결 전략을 지도하여 문제해결 역량을 기르게 한다.

#### (4) 자료와 가능성

##### ① 자료의 정리

- [2수04-01] 여러 가지 사물을 정해진 기준 또는 자신이 정한 기준으로 분류하여 개수를 세어 보고, 기준에 따른 결과를 말할 수 있다.
- [2수04-02] 자료를 분류하여 표로 나타내고, 자료를 표로 나타내면 편리한 점을 말할 수 있다.
- [2수04-03] 자료를 분류하여 ○, ×, / 등을 이용한 그래프로 나타내고, 자료를 그래프로 나타내면 편리한 점을 말할 수 있다.

#### (가) 성취기준 해설

- [2수04-02] 표를 이용하여 자료의 크기를 수로 정리하면, 자료의 크기를 나타내고 비교하는 데 편리하다는 점을 통해 수학의 유용성을 인식하게 한다.
- [2수04-03] 그래프를 이용하여 자료의 크기를 시각적으로 나타내면, 자료의 크기를 한눈에 비교하는 데 편리하다는 점을 통해 수학의 유용성을 인식하게 한다.

#### (나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- ‘자료와 가능성’ 영역에서는 용어와 기호로 ‘표, 그래프’를 다룬다.
- 분류하기에서는 학생들이 실생활에서 친근하게 느낄 수 있는 소재를 활용한다.
- 기준을 정하여 분류할 때는 학생들이 정한 다양한 기준을 존중하되, 분명하지 않은 기준으로는 분류하기가 어렵다는 점을 인식하게 한다.
- 자료를 분류하여 표나 그래프를 만들 때는 자료가 중복되거나 빠지지 않도록 세어 보는 방법을 함께 지도한다.



- 표와 그래프로 나타내기는 실생활이나 환경과 관련된 자료들을 활용하되, 학생들의 수준에 비해 어려운 분류 대상이나 분류 기준을 사용하지 않는다.
- ‘자료와 가능성’ 영역의 문제 상황에 적합한 문제해결 전략을 지도하여 문제해결 역량을 기르게 한다.

### [초등학교 3~4학년]

#### (1) 수와 연산

##### ① 다섯 자리 이상의 수

- [4수01-01] 큰 수의 필요성을 인식하면서 10000 이상의 큰 수에 대한 자릿값과 위치적 기수법을 이해하고, 수를 읽고 쓸 수 있다.
- [4수01-02] 다섯 자리 이상의 수의 범위에서 수의 계열을 이해하고, 수의 크기를 비교하며 그 방법을 설명할 수 있다.

##### ② 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈

- [4수01-03] 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

##### ③ 세 자리 수 범위의 곱셈

- [4수01-04] 곱하는 수가 한 자리 수 또는 두 자리 수인 곱셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

##### ④ 세 자리 수 범위의 나눗셈

- [4수01-05] 나눗셈이 이루어지는 실생활 상황과 연결하여 나눗셈의 의미를 알고, 곱셈과 나눗셈의 관계를 이해한다.
- [4수01-06] 나누는 수가 한 자리 수인 나눗셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있으며, 나눗셈에서 몫과 나머지의 의미를 안다.
- [4수01-07] 나누는 수가 두 자리 수인 나눗셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

##### ⑤ 자연수의 어림셈

- [4수01-08] 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 관련한 여러 가지 상황에서 어림셈을 할 수 있다.

##### ⑥ 분수

- [4수01-09] 양의 등분할을 통하여 분수의 필요성을 인식하고, 분수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다.
- [4수01-10] 단위분수, 진분수, 가분수, 대분수를 알고, 그 관계를 이해한다.
- [4수01-11] 분모가 같은 분수끼리, 단위분수끼리 크기를 비교하고 그 방법을 설명할 수 있다.

##### ⑦ 소수

- [4수01-12] 분모가 10인 진분수와 연결하여 소수 한 자리 수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다.
- [4수01-13] 자릿값의 원리를 바탕으로 소수 두 자리 수와 소수 세 자리 수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다.
- [4수01-14] 소수의 크기를 비교하고 그 방법을 설명할 수 있다.

##### ⑧ 분수의 덧셈과 뺄셈

- [4수01-15] 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

##### ⑨ 소수의 덧셈과 뺄셈

- [4수01-16] 소수 두 자리 수의 범위에서 소수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

#### (가) 성취기준 해설

- [4수01-03] 덧셈은 세 자리 수의 범위에서 다루되, 합이 네 자리 수인 경우도 포함한다.
- [4수01-04] 곱셈은 ‘(두 자리 수) × (한 자리 수)’, ‘(세 자리 수) × (한 자리 수)’, ‘(두 자리 수) × (두 자리 수)’, ‘(세 자리 수) × (두 자리 수)’를 다룬다.

- [4수01-06] 나눗셈에서 ‘(두 자리 수)÷(한 자리 수)’는 나누어떨어지는 경우와 나누어떨어지지 않는 경우를 포함하여 몫과 나머지를 이해하게 한다.
- [4수01-07] 나누는 수가 두 자리 수인 나눗셈에서는 ‘(두 자리 수)÷(두 자리 수)’, ‘(세 자리 수)÷(두 자리 수)’를 다룬다.
- [4수01-09] 1보다 작은 양을 나타내는 경우를 통하여 분수의 필요성이나 그 표현의 편리함을 인식하게 할 수 있다. 양의 등분할을 통하여 분수를 도입할 때 부분과 전체를 파악하게 하고, ‘분모’, ‘분자’를 사용한다.

#### (나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- ‘수와 연산’ 영역에서는 용어와 기호로 ‘나눗셈, 몫, 나머지, 나누어떨어진다, 분수, 분모, 분자, 단위분수, 진분수, 가분수, 대분수, 자연수, 소수, 소수점(.), ÷’를 다룬다.
- 뉴스, 광고 등 여러 가지 매체를 활용해 자료를 조사하는 활동을 통하여 실생활에서 다섯 자리 이상의 큰 수가 쓰이는 경우를 찾아보게 한다. 조사한 결과를 바탕으로 큰 수와 관련하여 이야기 기하는 활동을 통하여 큰 수에 대한 필요성을 인식하고 양감을 기르게 한다.
- 한 가지 상황을 곱셈식과 나눗셈식으로 나타내는 활동을 통하여 곱셈과 나눗셈의 관계를 이해하게 한다.
- 나눗셈에 대한 검산에서는 나눗셈식을 보고 곱셈식으로 나타내는 것보다 검산의 목적과 필요성을 이해하는 데 초점을 둔다.
- 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 하기 전에 계산 결과를 어렵하기, 어려운 값을 이용하여 계산 결과가 타당한지 확인하기, 어렵셈이 필요한 실생활 상황의 문제를 해결하기 등을 다룰 수 있다.
- 친근한 실생활 상황을 이용하여 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에 관련된 문제를 만들어 해결하게 하고, 사칙계산의 유용성을 인식하게 한다.
- 실생활에서 소수를 활용한 사례를 통해 소수의 필요성을 인식하게 한다.
- 소수의 덧셈과 뺄셈은 계산 원리를 이해할 수 있는 수준에서 간단히 다룬다.
- 계산 기능을 숙달하는 것이 목적이 아닌 경우에는 계산기를 사용하게 할 수 있다.
- ‘수와 연산’ 영역의 문제 상황에 적합한 문제해결 전략을 지도하고, 문제해결 과정을 설명하게 하여 문제해결 역량을 기르게 한다.
- ‘수와 연산’ 영역에서 문제해결 과정을 설명할 때 다른 친구의 의견을 존중하고 경청하는 태도로 참여하게 한다.

#### (2) 변화와 관계

##### ① 규칙을 수나 식으로 나타내기

[4수02-01] 다양한 변화 규칙을 찾아 설명하고, 그 규칙을 수나 식으로 나타낼 수 있다.

[4수02-02] 계산식의 배열에서 규칙을 찾고, 계산 결과를 추측할 수 있다.

##### ② 등호와 동치 관계

[4수02-03] 등호를 사용하여 크기가 같은 두 양의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.

(가) 성취기준 해설

- [4수02-02] 다양한 규칙을 찾을 수 있는 계산식의 배열, 수의 성질을 탐구할 수 있는 계산식의 배열을 다룬다.
- [4수02-03] 등호(=)의 의미를 토대로 구체물, 그림 등을 사용하여 주어진 식이 옳은지 판단하는 활동, 크기가 같은 두 양을 찾는 활동 등을 통해 동치 관계를 이해하게 한다.

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- 규칙을 식으로 나타낼 때 혼합 계산식, 일반항을 나타낸 식 등을 이용해야 하는 복잡한 문제는 다루지 않는다.
- 계산식의 배열에서 계산 결과의 규칙을 찾는 활동을 할 때 필요에 따라 계산기를 사용하게 할 수 있다.
- 자신이 추측한 규칙을 배열에 적용해 보는 등 다양한 방법으로 규칙이 옳은지 스스로 검토하게 할 수 있다.
- 동치 관계는 두 자리 수의 범위에서 다룬다.
- 등호가 사용된 식이 옳은지 판단할 때는 수 감각이나 학생이 직관적으로 이해하고 있는 연산의 성질을 이용하여 두 양이 서로 같은지 비교하게 할 수 있다.
- ‘변화와 관계’ 영역의 문제 상황에 적합한 문제해결 전략을 지도하고, 문제해결 과정을 설명하게 하여 문제해결 역량을 기르게 한다.
- ‘변화와 관계’ 영역에서 문제해결 과정을 설명할 때 다른 친구의 의견을 존중하고 경청하는 태도로 참여하게 한다.

(3) 도형과 측정

① 도형의 기초

- [4수03-01] 직선, 선분, 반직선을 이해하고 구별할 수 있다.
- [4수03-02] 각과 직각을 이해하고, 직각과 비교하는 활동을 통하여 예각과 둔각을 구별할 수 있다.
- [4수03-03] 직선의 수직 관계와 평행 관계를 이해한다.

② 평면도형의 이동

- [4수03-04] 구체물이나 평면도형의 밀기, 뒤집기, 돌리기 활동을 통하여 그 변화를 이해한다.
- [4수03-05] 평면에서 점의 이동에 대해 위치와 방향을 이용하여 설명할 수 있다.

③ 원의 구성 요소

- [4수03-06] 원의 중심, 반지름, 지름을 이해하고, 그 성질을 안다.
- [4수03-07] 컴퍼스를 이용하여 여러 가지 크기의 원을 그릴 수 있다.

④ 여러 가지 삼각형

- [4수03-08] 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 이등변삼각형, 정삼각형을 이해하고, 그 성질을 탐구하고 설명할 수 있다.
- [4수03-09] 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 이해한다.

⑤ 여러 가지 사각형

- [4수03-10] 여러 가지 모양의 사각형에 대한 분류 활동을 통하여 직사각형, 정사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모를 이해하고, 그 성질을 탐구하고 설명할 수 있다.

## Ⅵ 다각형

[4수03-11] 다각형과 정다각형을 이해한다.

[4수03-12] 주어진 도형을 이용하여 여러 가지 모양을 만들거나 채우고 설명할 수 있다.

## Ⅶ 시각과 시간

[4수03-13] 1분과 1초의 관계를 이해하고, 초 단위까지 시각을 읽을 수 있다.

[4수03-14] 실생활 문제 상황과 연결하여 초 단위까지의 시간의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

## Ⅷ 길이

[4수03-15] 길이 단위 1 mm와 1 km를 알고, 이를 이용하여 길이를 측정하고 어렵하며 수학의 유용성을 인식할 수 있다.

[4수03-16] 1 cm와 1 mm, 1 km와 1 m의 관계를 이해하고, 길이를 '몇 cm 몇 mm'와 '몇 mm', '몇 km 몇 m'와 '몇 m'로 다양하게 표현할 수 있다.

## Ⅸ 들이

[4수03-17] 들이 단위 1 L와 1 mL를 알고, 이를 이용하여 들이를 측정하고 어렵하며 수학의 유용성을 인식할 수 있다.

[4수03-18] 1 L와 1 mL의 관계를 이해하고, 들이를 '몇 L 몇 mL'와 '몇 mL'로 표현할 수 있다.

[4수03-19] 실생활 문제 상황과 연결하여 들이의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

## Ⅹ 무게

[4수03-20] 실생활에서 무게를 나타낼 때 사용하는 단위 1 g과 1 kg을 알고, 이를 이용하여 무게를 측정하고 어렵하며 수학의 유용성을 인식할 수 있다.

[4수03-21] 1 kg과 1 g의 관계를 이해하고, 무게를 '몇 kg 몇 g'과 '몇 g'으로 표현할 수 있다.

[4수03-22] 실생활에서 무게를 나타낼 때 사용하는 단위 1 t을 알고, 1 t과 1 kg의 관계를 이해한다.

[4수03-23] 실생활 문제 상황과 연결하여 무게의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

## Ⅺ 각도

[4수03-24] 각의 크기의 단위인 1도(°)를 알고, 각도기를 이용하여 각의 크기를 측정하고 어렵할 수 있다.

[4수03-25] 여러 가지 방법으로 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 추론하고, 자신의 추론 과정을 설명할 수 있다.

### (가) 성취기준 해설

- [4수03-04] 실생활에서 평면도형의 이동을 활용한 사례를 찾아서 이동에 따른 변화를 추론하고 위치나 방향이 어떻게 변화했는지 설명하게 한다.
- [4수03-05] 평면에서 점의 이동은 격자를 따라 위, 아래, 오른쪽, 왼쪽으로 '∼칸', '∼cm'를 이동하는 수준에서 다룬다. 한 점의 이동에 대해 위치와 방향을 설명하는 데 초점을 두고, 꼭짓점의 이동을 이용하여 평면도형의 이동을 설명하는 활동은 다루지 않는다.
- [4수03-07] 컴퍼스를 사용하여 다양한 크기의 원을 그리는 방법을 원의 성질과 연결하여 이해하게 한다.
- [4수03-11] 도형판, 모양 조각 등의 교구를 이용한 구체적인 조작 활동을 통해 다각형과 정다각형을 이해하게 한다.
- [4수03-12] 다양한 교구와 공학 도구 등을 이용한 구체적인 활동을 통해 주어진 도형으로 여러 가지 모양을 다양하게 만들거나 채울 수 있다.
- [4수03-20] 초등학교에서는 무게와 질량의 개념을 엄밀하게 구분하지 않으며, 무게를 비교하고 측정하는 데에 g, kg의 단위를 사용하게 한다.

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- ‘도형과 측정’ 영역에서는 용어와 기호로 ‘직선, 선분, 반직선, 각, (각의) 꼭짓점, (각의) 변, 직각, 예각, 둔각, 수직, 수선, 평행, 평행선, 원의 중심, 반지름, 지름, 이등변삼각형, 정삼각형, 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형, 직사각형, 정사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 다각형, 정다각형, 대각선, 초, 도( $^{\circ}$ ), mm, km, L, mL, g, kg, t’을 다룬다.
- 직선, 선분, 반직선에 대한 평가에서는 정확한 정의나 표현보다 직선, 선분, 반직선을 서로 구별할 수 있는지에 중점을 둔다.
- 평면도형의 이동에서 돌리고 뒤집기나 뒤집고 돌리기 등 복잡한 변화를 지양한다.
- 평면도형의 이동을 활용하여 모양의 변화나 무늬를 설명하게 할 때 설명 방법이 다양할 수 있음에 유의하여 다른 친구들의 설명을 비판적으로 검토하게 한다.
- 평면도형의 이동, 원 그리기 등을 이용하여 여러 가지 모양이나 무늬 만들기 활동을 통해 수학의 아름다움을 느끼게 할 수 있다.
- 삼각형의 성질을 탐구하는 활동에서 구체적인 관찰, 실험, 측정 등 귀납적 추론을 통해 성질을 이해하게 한다.
- 여러 가지 사각형의 성질은 구체적인 조작 활동을 통하여 간단한 것만 다루고, 여러 가지 사각형 사이의 관계는 다루지 않는다.
- 시각과 시간의 의미는 구체적인 상황 속에서 구별하여 사용할 수 있는 정도로 이해하게 한다.
- 실제로 재거나 어림하는 측정 활동을 통하여 시간, 길이, 들이, 무게, 각도에 대한 양감을 기르게 한다.
- 들이, 무게의 표준 단위를 도입하기 전에 표준 단위의 필요성을 알게 한다.
- 시간, 길이, 들이, 무게의 단위를 지도할 때 단위 사이의 관계를 이해하는 데 중점을 두고, 1 km와 1 cm의 관계, 1 t과 1 g의 관계 등의 지나친 단위 환산은 다루지 않는다.
- 길이, 들이, 무게, 각도를 측정할 때 측정도구의 눈금에 일치하지 않는 측정값을 ‘약’으로 표현하게 한다.
- ‘도형과 측정’ 영역의 문제 상황에 적합한 문제해결 전략을 지도하고, 문제해결 과정을 설명하게 하여 문제해결 역량을 기르게 한다.
- ‘도형과 측정’ 영역에서 문제해결 과정을 설명할 때 다른 친구의 의견을 존중하고 경청하는 태도로 참여하게 한다.

(4) 자료와 가능성

㉠ 자료의 수집과 정리

[4수04-01] 자료를 수집하여 그림그래프나 막대그래프로 나타내고 해석할 수 있다.

[4수04-02] 자료를 수집하여 꺾은선그래프로 나타내고 해석할 수 있다.

[4수04-03] 탐구 문제를 해결하기 위해 자료를 수집, 정리하여 막대그래프나 꺾은선그래프로 나타내고 해석할 수 있다.

(가) 성취기준 해설

- [4수04-03] 여러 가지 문제를 해결하기 위해 자료를 수집, 정리하고 그래프로 나타내어 해석하는 일련의 과정을 직접 경험하게 한다. 자료의 크기를 비교할 때는 막대그래프로, 시간에 따른 변화의 경향을 알아볼 때는 꺾은선그래프로 나타내는 것이 편리함을 알고, 자료의 특성에 따라 목적에 맞는 적절한 그래프를 선택하게 한다.

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- ‘자료와 가능성’ 영역에서는 용어와 기호로 ‘그림그래프, 막대그래프, 꺾은선그래프’를 다룬다.
- 문제 상황에 맞게 간단한 설문조사, 실험과 관찰, 공공 자료의 활용 등을 통해 자료를 직접 수집하게 한다.
- 그림그래프를 그릴 때 항목의 이름과 수량의 단위를 명확히 인식하고, 자료의 개수에 따라 그림이 나타내는 단위를 적절히 선택하게 한다.
- 막대그래프와 꺾은선그래프를 그릴 때는 가로축과 세로축이 각각 무엇을 나타내는지 확인하게 하고 눈금 한 칸이 나타내는 크기를 적절히 선택하게 한다.
- 막대그래프와 꺾은선그래프를 그릴 때 공학 도구를 사용하게 할 수 있다.
- 여러 가지 사회, 환경 문제를 탐구하는 데 그림그래프, 막대그래프, 꺾은선그래프로부터 얻은 정보를 활용하게 할 수 있다.
- 자료 수집의 목적과 수집한 자료의 특성에 맞는 그래프로 적절히 표현되었는지를 비판적으로 판단하게 할 수 있다.
- ‘자료와 가능성’ 영역의 문제 상황에 적합한 문제해결 전략을 지도하고, 문제해결 과정을 설명하게 하여 문제해결 역량을 기르게 한다.
- ‘자료와 가능성’ 영역에서 문제해결 과정을 설명할 때 다른 친구의 의견을 존중하고 경청하는 태도로 참여하게 한다.

[초등학교 5~6학년]

(1) 수와 연산

① 자연수의 혼합 계산

[6수01-01] 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 혼합 계산에서 계산하는 순서를 알고, 혼합 계산을 할 수 있다.

② 수의 범위와 올림, 버림, 반올림

[6수01-02] 실생활과 연결하여 이상, 이하, 초과, 미만의 의미와 쓰임을 알고, 이를 활용하여 수의 범위를 나타낼 수 있다.

[6수01-03] 어림값을 구하기 위한 방법으로 올림, 버림, 반올림의 의미와 필요성을 알고, 이를 실생활에 활용함으로써 수학의 유용성을 인식할 수 있다.

③ 약수와 배수

[6수01-04] 약수, 공약수, 최대공약수를 이해하고 구할 수 있다.

[6수01-05] 배수, 공배수, 최소공배수를 이해하고 구할 수 있다.

④ 분수의 덧셈과 뺄셈

[6수01-06] 크기가 같은 분수를 만드는 방법을 이해하고, 분수를 약분, 통분할 수 있다.

[6수01-07] 분모가 다른 분수의 크기를 비교하고 그 방법을 설명할 수 있다.

[6수01-08] 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 탐구하고 그 계산을 할 수 있다.

⑤ 분수의 곱셈과 나눗셈

[6수01-09] 분수의 곱셈의 계산 원리를 탐구하고 그 계산을 할 수 있다.

[6수01-10] ‘(자연수) ÷ (자연수)’에서 나눗셈의 몫을 분수로 나타낼 수 있다.

[6수01-11] 분수의 나눗셈의 계산 원리를 탐구하고 그 계산을 할 수 있다.

⑥ 분수와 소수의 관계

[6수01-12] 분수와 소수의 관계를 이해하고 크기를 비교하며 그 방법을 설명할 수 있다.



#### ㉓ 소수의 곱셈과 나눗셈

[6수01-13] 소수의 곱셈의 계산 원리를 탐구하고 그 계산을 할 수 있다.

[6수01-14] ‘(자연수)÷(자연수)’에서 나눗셈의 몫을 소수로 나타낼 수 있다.

[6수01-15] 소수의 나눗셈의 계산 원리를 탐구하고 그 계산을 할 수 있다.

#### (가) 성취기준 해설

- [6수01-11] 분수의 나눗셈은 ‘(분수)÷(자연수)’, ‘(자연수)÷(분수)’, ‘(분수)÷(분수)’를 다룬다.
- [6수01-15] 소수의 나눗셈은 ‘(소수)÷(자연수)’, ‘(자연수)÷(소수)’, ‘(소수)÷(소수)’를 다룬다.

#### (나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- ‘수와 연산’ 영역에서는 용어와 기호로 ‘이상, 이하, 초과, 미만, 올림, 버림, 반올림, 약수, 공약수, 최대공약수, 배수, 공배수, 최소공배수, 약분, 통분, 기약분수’를 다룬다.
- 자연수의 혼합 계산은 계산 순서에 중점을 두고, 지나치게 복잡한 혼합 계산은 다루지 않는다.
- 수의 범위와 올림, 버림, 반올림은 측정 상황과 같이 수나 양의 어림이 필요한 여러 가지 실생활 사례를 통하여 그 의미를 알게 한다.
- 약수와 배수는 실생활에서 활용되는 경우를 찾아 자연수 범위에서 다룬다.
- 약수와 배수를 학습하는 과정에서 약수와 배수의 관계를 이해하게 한다.
- 최대공약수와 최소공배수는 두 수에 대하여 약수와 배수를 각각 나열하여 공통된 약수와 배수를 찾는 방법으로 그 의미를 이해하게 하고, 평가에서 소인수의 곱으로 나타내어 구하는 방법은 다루지 않는다.
- 구체물이나 그림 등을 이용하여 크기가 같은 분수를 만든 후 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 비교하는 활동을 통해 크기가 같은 분수를 만드는 방법을 이해하게 한다.
- 분모가 다른 분수의 크기를 비교할 때 수 감각을 이용하여 추론하고 토론하는 활동을 하게 한다.
- 분수의 사칙계산에서 기약분수로 나타낼 것을 요구하지 않을 경우, 계산 결과를 기약분수가 아닌 분수로 나타내는 것도 허용한다.
- 분수를 통분할 때는 공통분모로 최소공배수뿐만 아니라 분모의 곱과 같은 공배수도 이용하게 할 수 있다.
- 분수의 곱셈과 나눗셈, 소수의 곱셈과 나눗셈은 계산 원리를 탐구하여 이해하는 수준에서 다룬다.
- 소수의 곱셈과 나눗셈에서 복잡한 계산은 계산기를 사용하게 할 수 있다.
- 소수의 곱셈과 나눗셈에서 계산 결과를 어림할 필요가 있는 상황, 정확한 계산 대신에 어림셈으로 비교가 가능한 상황 등 어림셈이 필요한 여러 가지 실생활 상황을 제시하여 어림셈의 필요성과 유용성을 알게 한다.
- ‘수와 연산’ 영역의 문제 상황에서 문제해결 전략 비교하기, 주어진 문제에서 필요 없는 정보나 부족한 정보 찾기, 조건을 바꾸어 새로운 문제 만들기, 문제해결 과정의 타당성 검토하기 등을 통하여 문제해결 역량을 기르게 한다.
- ‘수와 연산’ 영역에서 자신의 문제해결 과정을 논리적으로 설명하고 다른 친구의 문제해결 과정과 비교함으로써 비판적으로 사고하는 태도를 기르게 한다.

## (2) 변화와 관계

### ① 대응 관계

[6수02-01] 한 양이 변할 때 다른 양이 그에 종속하여 변하는 대응 관계를 나타낸 표에서 규칙을 찾아 설명하고, □, △ 등을 사용하여 식으로 나타낼 수 있다.

### ② 비와 비율

[6수02-02] 두 양의 크기를 비교하는 상황을 통해 비의 개념을 이해하고, 두 양의 관계를 비로 나타낼 수 있다.

[6수02-03] 비율을 이해하고, 비율을 분수, 소수, 백분율로 나타낼 수 있다.

### ③ 비례식과 비례배분

[6수02-04] 비례식을 알고, 그 성질을 이해하며, 이를 활용하여 간단한 비례식을 풀 수 있다.

[6수02-05] 비례배분을 알고, 주어진 양을 비례배분 할 수 있다.

## (가) 성취기준 해설

- [6수02-02] 두 양을 비교할 때는 한 양을 기준으로 다른 양이 몇 배가 되는지를 나타낼 필요성을 인식하면서 비의 개념을 이해하게 한다.

## (나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- ‘변화와 관계’ 영역에서는 용어와 기호로 ‘비, 기준량, 비교하는 양, 비율, 백분율, 비례식, 비례배분, :, %’를 다룬다.
- 대응 관계를 탐구할 때는 두 양의 변화를 함께 고려하게 하고, 한 양의 변화에만 초점을 두지 않는다.
- 두 양 사이의 대응 관계를 식으로 나타내는 방법을 지도하는 활동에서는 덧셈식, 뺄셈식, 곱셈식, 나눗셈식 중 하나로 표현되는 간단한 경우만 다룬다.
- 비와 비율을 다룰 때는 기준량과 비교하는 양을 명확하게 인식하게 한다.
- 비와 비율을 탐구할 때는 실생활 및 타 교과에서 비와 비율이 적용되는 간단한 사례를 활용하며 수학의 유용성을 인식하게 한다.
- 동일한 비율을 분수, 소수, 백분율로 다양하게 나타낼 수 있음을 알게 한다.
- 대응 관계를 기호를 사용하여 식으로 나타내고 두 양의 관계를 비로 나타내 보는 경험을 통해 수학적 표현의 편리함을 인식하게 할 수 있다.
- ‘변화와 관계’ 영역에서는 기후변화, 생태계, 과학 기술의 발전 등 학생의 삶과 관련된 다양한 문제 상황을 활용할 수 있다.
- ‘변화와 관계’ 영역의 문제 상황에서 문제해결 전략 비교하기, 주어진 문제에서 필요 없는 정보나 부족한 정보 찾기, 조건을 바꾸어 새로운 문제 만들기, 문제해결 과정의 타당성 검토하기 등을 통하여 문제해결 역량을 기르게 한다.
- ‘변화와 관계’ 영역에서 자신의 문제해결 과정을 논리적으로 설명하고 다른 친구의 문제해결 과정과 비교함으로써 비판적으로 사고하는 태도를 기르게 한다.

## (3) 도형과 측정

### ① 합동과 대칭

[6수03-01] 도형의 합동을 이해하고, 합동인 도형의 성질을 탐구하고 설명할 수 있다.

[6수03-02] 실생활과 연결하여 선대칭도형과 점대칭도형을 이해하고 그릴 수 있다.



## ② 직육면체와 정육면체

[6수03-03] 직육면체와 정육면체를 이해하고, 구성 요소와 성질을 탐구하고 설명할 수 있다.

[6수03-04] 직육면체와 정육면체의 겨냥도와 전개도를 그릴 수 있다.

## ③ 각기둥과 각뿔

[6수03-05] 각기둥과 각뿔을 이해하고, 구성 요소와 성질을 탐구하고 설명할 수 있다.

[6수03-06] 각기둥의 전개도를 그릴 수 있다.

## ④ 원기둥, 원뿔, 구

[6수03-07] 원기둥, 원뿔, 구를 이해하고, 구성 요소와 성질을 탐구하고 설명할 수 있다.

[6수03-08] 원기둥의 전개도를 그릴 수 있다.

## ⑤ 입체도형의 공간 감각

[6수03-09] 쌓기나무로 만든 입체도형을 보고 사용된 쌓기나무의 개수를 구할 수 있다.

[6수03-10] 쌓기나무로 만든 입체도형의 위, 앞, 옆에서 본 모양을 표현할 수 있고, 이러한 표현을 보고 입체도형의 모양을 추측할 수 있다.

## ⑥ 다각형의 둘레와 넓이

[6수03-11] 평면도형의 둘레를 이해하고, 기본적인 평면도형의 둘레를 구할 수 있다.

[6수03-12] 넓이 단위  $1\text{ cm}^2$ ,  $1\text{ m}^2$ ,  $1\text{ km}^2$ 를 알며, 그 관계를 이해한다.

[6수03-13] 직사각형과 정사각형의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

[6수03-14] 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 넓이를 구하는 방법을 다양하게 추론하고, 이와 관련된 문제를 해결할 수 있다.

## ⑦ 원주율과 원의 넓이

[6수03-15] 여러 가지 원 모양 물체의 원주와 지름을 측정하는 활동을 통하여, 원주율이 일정한 값을 알고 그 근삿값을 사용할 수 있다.

[6수03-16] 원주와 원의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

## ⑧ 입체도형의 겉넓이와 부피

[6수03-17] 직육면체와 정육면체의 겉넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

[6수03-18] 부피 단위  $1\text{ cm}^3$ ,  $1\text{ m}^3$ 를 알며, 그 관계를 이해한다.

[6수03-19] 직육면체와 정육면체의 부피를 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

### (가) 성취기준 해설

- [6수03-01] 합동인 두 도형에서 대응점, 대응변, 대응각을 각각 찾게 하고 대응변의 길이와 대응각의 크기를 비교하는 활동을 통해 합동인 도형의 성질을 탐구하고 설명하게 한다.
- [6수03-10] 여러 가지 물체, 건축물, 예술품, 쌓기나무로 만든 입체도형 등의 위, 앞, 옆에서 본 모양을 이용해서 전체 모양을 추측하게 하고, 이에 대해 자신의 추론 과정을 설명하게 한다.
- [6수03-15] 여러 가지 원에서 (원주)÷(지름)의 값을 구하여 모든 원에서 원주율이 일정함을 이해하게 하고, 원주율의 근삿값으로 3.14를 사용하게 한다.
- [6수03-16] 지름과 원주율을 이용하면 원주를 직접 측정하지 않고도 구할 수 있음을 알게 하고, 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 이용하여 원의 넓이를 구하는 방법을 이해하게 한다.

### (나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- ‘도형과 측정’ 영역에서는 용어와 기호로 ‘합동, 대칭, 대응점, 대응변, 대응각, 선대칭도형, 점대칭도형, 대칭축, 대칭의 중심, 직육면체, 정육면체, 면, 모서리, 밑면, 옆면, 겨냥도, 전개도, 각기둥, 각뿔, 원기둥, 원뿔, 구, 모선, 가로, 세로, 밑변, 높이, 원주, 원주율,  $\text{cm}^2$ ,  $\text{m}^2$ ,  $\text{km}^2$ ,  $\text{cm}^3$ ,  $\text{m}^3$ ’를 다룬다.

- 선대칭도형과 점대칭도형 그리기를 평가할 때 모눈종이, 점판, 공학 도구 등을 이용하여 쉽게 그릴 수 있게 한다.
- 무늬 찾기, 종이 겹쳐 오리기, 도장 찍기, 데칼코마니 등 구체적인 조작 활동을 통하여 도형의 합동의 의미를 알게 한다.
- 실생활이나 자연 환경 등에서 도형의 합동, 선대칭도형, 점대칭도형의 예를 찾고 수학의 아름다움을 느낄 수 있게 한다.
- 입체도형의 전개도에 대한 평가는 전개도가 될 수 있는 것과 될 수 없는 것을 구별하는 데 중점을 둔다.
- 각기둥의 전개도는 간단한 형태만 다루고, 각뿔과 원뿔의 전개도는 다루지 않는다.
- 한 직선을 중심으로 직사각형, 직각삼각형, 반원을 돌리는 활동을 통하여 원기둥, 원뿔, 구를 만들어 보게 한다.
- 실생활에서 접할 수 있는 여러 가지 물건, 건축물 등에서 직육면체, 정육면체, 각기둥, 각뿔, 원기둥, 원뿔, 구를 찾고 수학에 대한 흥미와 관심을 갖게 한다.
- 입체도형의 구성 요소와 성질, 전개도, 쌓기나무로 만든 입체도형을 탐구할 때는 여러 가지 모형과 공학 도구를 이용하게 할 수 있다.
- 쌓기나무로 만든 입체도형의 위, 앞, 옆에서 본 모양에 대한 평가를 할 때는 간단한 모양을 이용한다.
- 삼각형의 넓이를 구할 때는 높이가 삼각형의 외부에 있는 것도 다룬다.
- 넓이 단위 사이의 관계 중  $1\text{ cm}^2$ ,  $1\text{ km}^2$  사이의 단위 환산은 다루지 않는다.
- 도형의 넓이는  $1\text{ cm}^2$ 인 정사각형의 몇 배인지를 구하는 것임을 이해하게 하고, 도형의 변형을 이용하여 넓이를 구하는 여러 가지 방법을 추론하게 한다.
- 원주율을 지도할 때는 원주와 지름의 관계를 이해하고 원주율에 대한 양감을 기르게 한다.
- 원주율, 원주, 원의 넓이, 입체도형의 겉넓이와 부피 등을 구할 때 복잡한 계산은 계산기를 사용하게 한다.
- 겉넓이와 부피를 구하는 방법에 대하여 다양한 추론을 하게 하고, 자신의 추론 과정을 다른 사람에게 설명하게 할 수 있다.
- 도형의 넓이와 부피를 구하는 방법의 편리함을 인식하게 한다.
- ‘도형과 측정’ 영역의 문제 상황에서 문제해결 전략 비교하기, 주어진 문제에서 필요 없는 정보나 부족한 정보 찾기, 조건을 바꾸어 문제 만들기, 문제해결 과정의 타당성 검토하기 등을 통하여 문제해결 역량을 기르게 한다.
- ‘도형과 측정’ 영역에서 자신의 문제해결 과정을 논리적으로 설명하고 다른 친구의 문제해결 과정과 비교함으로써 비판적으로 사고하는 태도를 기르게 한다.

#### (4) 자료와 가능성

##### ① 자료의 수집과 정리

[6수04-01] 평균의 의미를 알고, 자료를 수집하여 평균을 구하고 해석할 수 있다.

[6수04-02] 자료를 수집하여 띠그래프나 원그래프로 나타내고 해석할 수 있다.

[6수04-03] 탐구 문제를 설정하고, 그에 맞는 자료를 수집, 정리하여 적절한 그래프로 나타내고 해석할 수 있다.

## ② 가능성

[6수04-04] 사건이 일어날 가능성을 말로 표현하고 비교할 수 있다.

[6수04-05] 사건이 일어날 가능성을 수로 나타낼 수 있다.

[6수04-06] 자료를 이용하여 가능성을 예상하고, 가능성에 근거하여 적절한 판단을 내릴 수 있다.

### (가) 성취기준 해설

- [6수04-01] 평균은 집단의 자료를 대표하는 값임을 이해하고, 여러 집단의 평균을 비교하는 활동을 통해 수학의 유용성을 인식하게 한다.
- [6수04-03] 해결하고자 하는 문제를 설정하고 그에 맞는 자료를 수집, 정리하여, 막대그래프, 꺾은선그래프, 띠그래프와 원그래프 중 적절한 그래프로 나타내고 해석하는 일련의 과정을 직접 경험하게 한다.
- [6수04-04] ‘확실하다’, ‘불가능하다’, ‘~일 것 같다’, ‘~아닐 것 같다’, ‘반반이다’ 등 일상에서 사건이 일어날 가능성을 나타내는 다양한 표현을 이해하고, 가능성의 크기를 비교하게 한다.
- [6수04-05] 가능성이 직관적으로 파악되는 생활 속의 간단한 사건에 대하여 그 가능성을 0,  $\frac{1}{2}$ , 1 등과 같은 수로 표현하게 한다. 사건이 일어날 가능성과 일어나지 않을 가능성이 같은 경우에 사건이 일어날 가능성을  $\frac{1}{2}$ 로 표현할 수 있음을 이해하게 한다.
- [6수04-06] 제비뽑기, 동전 던지기, 주사위 던지기, 회전판 돌리기 등과 같은 간단한 실험 결과를 나타낸 표나 그래프를 보고 사건이 일어날 가능성을 비교하고 대략적으로 예상하게 한다.

### (나) 성취기준 적용 시 고려 사항

- ‘자료와 가능성’ 영역에서는 용어와 기호로 ‘평균, 띠그래프, 원그래프, 가능성’을 다룬다.
- 자료를 수집할 때, 간단한 설문조사, 실험이나 관찰, 공공 자료 활용과 같은 방법 중 탐구 목적에 적합한 것을 결정하게 한다.
- 평균을 구하는 방법뿐만 아니라 그 의미를 직관적으로 파악하게 한다.
- 복잡한 자료의 평균이나 백분율을 구할 때 계산기를 사용하게 할 수 있다.
- 조사 자료에서 전체에 대한 각 부분의 비율을 비교해야 하는 문제 상황을 제시하여 띠그래프와 원그래프의 필요성을 인식하게 한다.
- 원그래프를 그릴 때는 눈금이 표시된 원을 사용하게 한다.
- 띠그래프와 원그래프를 그릴 때 공학 도구를 사용하게 할 수 있다.
- 여러 가지 사회, 환경 문제를 탐구하는 데 그림그래프, 막대그래프, 꺾은선그래프, 띠그래프, 원그래프로부터 얻은 정보를 활용하게 할 수 있다.
- 자료 수집의 목적과 수집한 자료의 특성에 맞는 그래프로 적절히 표현되었는지, 또는 정보를 왜곡하는 오류가 포함되어 있지는 않은지 등을 비판적으로 판단하게 할 수 있다.
- ‘자료와 가능성’ 영역의 문제 상황에서 문제해결 전략 비교하기, 주어진 문제에서 필요 없는 정보나 부족한 정보 찾기, 조건을 바꾸어 새로운 문제 만들기, 문제해결 과정의 타당성 검토하기 등을 통하여 문제해결 역량을 기르게 한다.
- ‘자료와 가능성’ 영역에서 자신의 문제해결 과정을 논리적으로 설명하고 다른 친구의 문제해결 과정과 비교함으로써 비판적으로 사고하는 태도를 기르게 한다.

## ② 2022 개정 수학과 교육과정에 대한 해설

### 가. 수학과 교육과정의 개정 방향

교육부는 최근 가속화된 인공지능 기술의 발전에 따른 디지털 전환, 기후 및 생태환경의 변화, 학령 인구의 감소 등 다양한 사회적 변화에 대비하여, 미래 사회에 필요한 역량, 교육 현장의 자율성 확대, 학습자 맞춤형 교육의 강화, 디지털 기반의 교육 지원을 중점으로 하는 2022 교육과정 개정을 추진하였다(교육부, 2022a). 이에 수학과는 2015 개정 수학과 교육과정의 문제점을 개선하고 2022 개정 교육과정 총론의 방향성에 부합하도록 다음 다섯 가지의 개정 방향을 설정했다([그림1-1] 참조).

첫째, 학생의 수학 교과 역량 함양 방향의 모색이다. 수학 교과 역량의 함양은 2015 개정 수학과 교육과정에서 중요한 개정 방향이자 중점을 두는 사항이었다. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학 교과 역량을 ‘수학 교육을 통해 학습자가 길러야 할 기본적인 필수적인 능력 또는 특성’으로 정의하고, ‘문제해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보처리, 태도 및 실천’의 총 6가지를 선정했다(교육부, 2015). 2022 개정 수학과 교육과정에서는 2015 개정 수학과 교육과정을 계승하되, 수학 교과 역량의 의미를 지식과 별개의 능력으로 다루기보다 지식, 과정, 태도가 결합된 성격으로 그 의미를 확장하고, 현장 실태 분석 결과(김동원 외 9인, 2020), 그 의미가 모호하다고 지적받은 창의·융합을 ‘연결’로 변경하는 방향으로 개정하였다. 그에 따라, 2022 개정 수학과 교육과정에서는 수학 교과 역량을 ‘문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리’ 5가지로 선정하고, 각 교과 역량이 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 아우르는 것으로 규정했으며, 교육과정 전반(수학과 목표, 내용 체계, 교수·학습 방법 및 평가)에서 수학 교과 역량을 반영하여 제시했다.

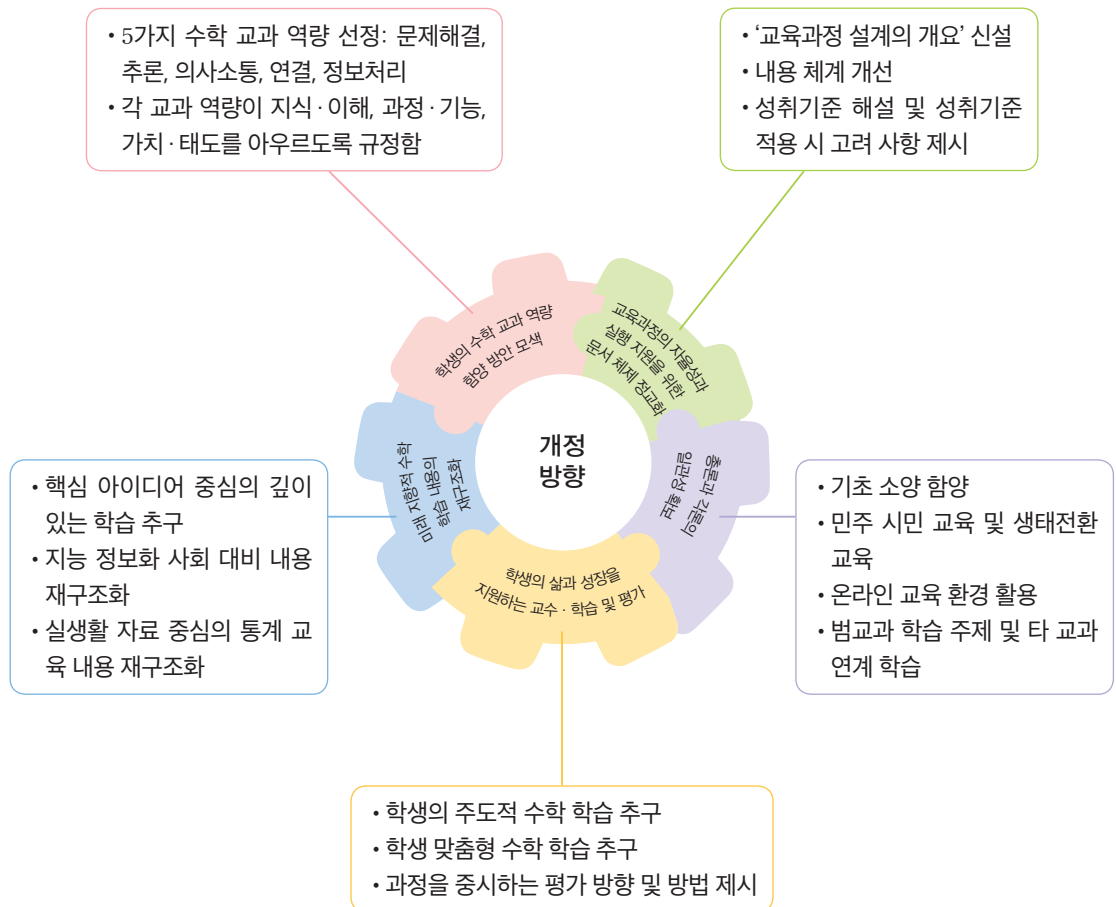
둘째, 미래 지향적 수학 학습 내용의 재구조화이다. 2022 개정 수학과 교육과정에서는 미래 사회의 변화와 시대적 요구를 반영하여 학생들에게 필요한 수학 학습 내용의 범위와 수준을 정교화하면서 동시에 학습 부담을 야기하지 않도록 적정화하려고 노력했다. 이를 위해 2022 개정 수학과 교육과정에서는 핵심 아이디어 중심의 깊이 있는 학습을 추구하도록 교육과정 설계의 개요와 내용 체계에 핵심 아이디어를 명시했다. 구체적으로 핵심 아이디어는 주요한 수학 개념, 원리, 법칙 등이 어떻게 발생하고 확장되며 그 결과로 어떤 일반성과 추상성을 획득하는지, 수평적으로 또는 수직적으로 어떻게 상호 관련되는지, 어떤 탐구 과정을 중점적으로 강조하는지 등을 압축하여 제시한 것이며, 수학 학습 과정에서 전이가 높은 내용을 담은 문장으로 기술하였다. 또 초등학교 수학에서 공학 도구를 활용하는 구체적인 방안을 성취기준 적용 시 고려 사항에 명시했고, 실생활 자료 중심의 통계 교육 내용을 재구성하여 초등학교에서도 실생활 자료를 중심으로 학생이 스스로 자료를 수집, 정리, 해석하는 일련의 통계적 문제해결 과정을 경험하도록 강조했다.

셋째, 학생의 삶과 성장을 지원하는 교수·학습 및 평가의 모색이다. 2022 개정 수학과 교육과정에서 교수·학습 및 평가는 학생의 지속적인 성장을 도모할 수 있는 방향으로, 학생의 주도적인 수학 학습, 개별 맞춤형 지도, 과정을 중시하는 평가 등을 강조한다(교육부, 2022b).

넷째, 총론과 각론 교육과정의 일관성 확보이다. 2022 개정 교육과정 총론(교육부, 2022a)은 기초 소양 및 역량 함양을 강조하며 교육과정을 개선할 필요성을 언급했는데, 이러한 총론의 중점 사항들이 교과 교육과정에서도 일관되게 반영되도록 했다. 그에 따라, 2022 개정 수학과 교육과정에는 기초 소양(언어 소양, 수리 소양, 디지털 소양)의 함양, 민주 시민 교육과 생태 전환 교육, 온라인 교육 환경의 활용, 범교과 학습 주제 및 타 교과 연계 학습, 진로 연계 교육 및 기초 학력 보장과 관련된 내용을 교수·학습 및 평가에 제시했다.

다섯째, 학교·교사 교육과정 자율성과 실행 지원을 위한 문서 체제의 정교화이다. 2022 개정 수

학과 교육과정은 교과 간 문서 체제의 통일성을 확보하고, 학교·교사의 교육과정에 대한 이해도를 높일 수 있도록 문서 체제를 개선했다. 구체적으로 ‘교육과정 설계의 개요’를 신설했고, 내용 체계를 핵심 아이디어와 더불어 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도의 세 범주로 설계했으며, 성취기준 해설 및 성취기준 적용 시 고려 사항을 제시했다.



[그림 1-1] 2022 수학과 교육과정의 개정 방향

## 나. 2022 개정 수학과 교육과정의 주요 특징

### (1) 교육과정 목차 및 문서 체제의 변화

2015 개정 수학과 교육과정의 목차와 2022 개정 수학과 교육과정의 목차를 비교하여, 문서 체제의 주요 변화를 살펴보면 [표 1-1]과 같다. 먼저 ‘일러두기, 교육과정 설계의 개요’, ‘성취기준 해설’, ‘성취기준 적용 시 고려 사항’이 신설되었다. 이를 통해 교육과정에 대한 이해도를 높이고자 했다. 반면에 ‘학습 요소, 교수·학습 방법 및 유의사항, 평가 방법 및 유의사항’이 삭제되었다. 그러나 해당 항목이 삭제되었을 뿐 ‘학습 요소, 교수·학습 방법 및 유의 사항, 평가 방법 및 유의 사항’ 중 중요 내용들은 상당수 ‘성취기준 해설’ 또는 ‘성취기준 적용 시 고려 사항’에 반영되었다.

[표 1-1] 2022 개정 수학과 교육과정 문서 체제의 변화

2015 개정 수학과 교육과정	2022 개정 수학과 교육과정
	일러두기 교육과정 설계의 개요
1. 성격 2. 목표	1. 성격과 목표 가. 성격 나. 목표
3. 내용 체계 및 성취기준 가. 내용 체계 나. 성취기준 (1) 영역명 성취기준 (가) 학습 요소 (나) 교수·학습 방법 및 유의 사항 (다) 평가 방법 및 유의 사항	2. 내용 체계 및 성취기준 가. 내용 체계 (1) 영역명 내용체계표 (2) 영역명 내용체계표 : 나. 성취기준 (1) 영역명 성취기준 (가) 성취기준 해설 (나) 성취기준 적용 시 고려 사항
4. 교수·학습 및 평가의 방향 가. 교수·학습 방향 나. 평가 방향	3. 교수·학습 및 평가 가. 교수·학습 (1) 교수·학습의 방향 (2) 교수·학습 방법 나. 평가 (1) 평가의 방향 (2) 평가 방법

## (2) 내용 체계의 변화

2022 개정 수학과 교육과정의 큰 변화 중 하나는 핵심 아이디어를 중심으로 내용 체계를 재구조화한 것이다. 이러한 맥락에서 초·중학교의 내용 영역명도 [표 1-2]와 같이 ‘수와 연산’, ‘변화와 관계’, ‘도형과 측정’, ‘자료와 가능성’의 4가지로 통일하여 구성하였다. 이를 통해 핵심 아이디어를 중심으로 초·중등 수학 내용 요소 간의 위계성과 역량 교육의 연속성을 추구하였다.

[표 1-2] 내용 영역명의 변화

2015 개정 수학과 교육과정		→	2022 개정 수학과 교육과정
초등학교	중학교		초·중학교
수와 연산	수와 연산		수와 연산
규칙성	문자와 식		변화와 관계
도형	함수		도형과 측정
측정	기하		자료와 가능성
자료와 가능성	확률과 통계		



내용 체계는 각 영역별로 표로 정리하였고, 영역별 핵심 아이디어와 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도의 세 범주로 구성하였다. 이에 대해 2022 개정 수학과 교육과정은 “내용 체계에서 핵심 아이디어는 학년(군) 또는 학교급을 관통하는 수학 내용의 본질 또는 가치를 보여 주며, 학생들이 핵심 아이디어를 향한 깊이 있는 학습을 추구하게 하였다(교육부, 2022b).”라고 그 의도를 명시하였다. 구체적인 형태는 [그림 1-2]와 같이 맨 위에 초·중등 수학을 아우르는 각 영역별 핵심 아이디어를 제시하고, 이를 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도의 세 범주로 구체화하였다.

(1) 수와 연산

핵심 아이디어	• 사물의 양은 자연수, 분수, 소수 등으로 표현되며, 수는 자연수에서 정수, 유리수, 실수로 확장된다. • 사칙계산은 자연수에 대해 정의되며 정수, 유리수, 실수의 사칙계산으로 확장되고 이때 연산의 성질이 일관되게 성립한다. • 수와 사칙계산은 수학 학습의 기본이 되며, 실생활 문제를 포함한 다양한 문제를 해결하는 데 유용하게 활용된다.					• 핵심 아이디어에 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 포함하여 기술함.	
범주	구분	내용 요소					• 각 영역에 대한 초·중등학교 수학 내용 체계가 어떻게 연결 및 확장되는지 제시함.
		초등학교			중학교		
		1~2학년	3~4학년	5~6학년	1~3학년		• 핵심 아이디어를 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도 세 범주로 구체화함. • 지식·이해는 학년군별, 학교급별로 구체화하고, 과정·기능, 가치·태도는 학교급별로 구체화함.
지식·이해		• 네 자리 이하의 수 • 두 자리 수 범위의 덧셈과 뺄셈 • 한 자릿수의 곱셈	• 다섯 자리 이상의 수 • 분수 • 소수 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 자연수의 곱셈과 나눗셈 • 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈 • 소수의 덧셈과 뺄셈	• 약수와 배수 • 수의 범위와 올림, 버림, 반올림 • 자연수의 혼합 계산 • 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈 • 소인수분해 • 정수와 유리수	• 유리수와 순환소수	• 제곱근과 실수	
	과정·기능	• 자연수, 분수, 소수 등 수 관련 개념과 원리를 탐구하기 • 수를 세고 읽고 쓰기 • 자연수, 분수, 소수의 크기를 비교하고 그 방법을 설명하기 • 사칙계산의 의미와 계산 원리를 탐구하고 계산하기 • 수 감각과 연산 감각 기르기 • 연산 사이의 관계, 분수와 소수의 관계를 탐구하기 • 수의 범위와 올림, 버림, 반올림한 어림값을 실생활과 연결하기 • 자연수, 분수, 소수, 사칙계산을 실생활 및 타 교과와 연결하여 문제해결하기			• 최대공약수와 최소공배수 구하기 • 정수, 유리수, 실수의 대소 관계 판단하기 • 정수, 유리수, 근호를 포함한 식의 사칙계산의 원리를 탐구하고 계산하기 • 유리수와 순환소수의 관계 설명하기		
가치·태도		• 자연수, 분수, 소수의 필요성 인식 • 사칙계산, 어림의 유용성 인식 • 분수 표현의 편리함 인식 • 수와 연산 관련 문제해결에서 비판적으로 사고하는 태도			• 음수, 무리수의 필요성 인식 • 실생활에서 사칙계산의 유용성 인식 • 수 체계의 논리적 아름다움에 대한 관심 • 정수와 유리수의 사칙계산의 원리를 이용하는 문제의 풀이 과정과 결과를 반성하는 태도		

[그림 1-2] 2022 개정 수학과 교육과정의 내용 체계 특징(교육부, 2022b)

## 다. 초등학교 수학 내용의 주요 변화

2022 개정 수학과 교육과정에서 변화된 내용 중 초등학교 수학 내용의 주요 변화를 영역별로 보고자 한다.

### (1) 수와 연산

수와 연산 영역의 주요 변화를 살펴보면 [표 1-3]과 같다.

[표 1-3] 수와 연산 영역의 주요 변화

1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 저학년 학생들의 한글 학습 정도를 고려하여 수를 한글로 쓰게 하는 것을 지양</li> <li>• 등호, 덧셈의 교환법칙, 결합법칙, 곱셈의 교환법칙에 대한 지도 방안을 성취기준 적용 시 고려 사항에 명시</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 계산의 어림 관련 성취기준 수정 및 부분 삭제</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 수의 범위(올림, 버림, 반올림) 영역 이동</li> <li>• 계산의 어림 관련 성취기준 수정 및 부분 삭제</li> <li>• 약수와 배수의 관계 관련 내용 약화</li> </ul>

첫째, 1~2학년군에서 수 개념을 지도할 때 어린 학생들의 한글 학습 정도를 고려하도록 성취기준 적용 시 고려 사항에 “저학년 학생들의 한글 학습 정도를 고려하여 수를 ‘여덟’, ‘마흔아홉’, ‘칠십육’, ‘첫째’ 등과 같이 한글로 쓰게 하는 것은 지양한다(교육부, 2022b).”라는 내용을 구체적으로 제시했다.

둘째, 1~2학년군에서 ‘두 자리 수 범위의 덧셈과 뺄셈’, ‘한 자리 수의 곱셈’을 지도할 때, 학생들이 등호의 의미를 이해하고, 활동을 통해 덧셈의 교환법칙과 결합법칙, 곱셈의 교환법칙에 대해 직관적으로 이해할 수 있도록 [표 1-4]와 같이 명시했다.

[표 1-4] 등호와 연산의 지도에 관한 고려 사항

등호의 의미 지도에 관한 고려 사항	연산의 성질 지도에 관한 고려 사항
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 덧셈식, 뺄셈식, 곱셈식에서 등호(=)의 양쪽에 있는 양이 서로 같음을 이해하게 한다.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 한 자리 수인 두 수를 바꾸어 더해 보고 그 결과를 비교하는 활동을 통하여 덧셈의 교환법칙을 직관적으로 이해하게 한다.</li> <li>• 세 수의 덧셈에서는 세 수를 앞에서부터 순서대로 더한 결과와 합이 10이 되는 두 수를 먼저 더하고 나머지 수를 더한 결과를 비교하는 활동을 통하여 덧셈의 결합법칙을 직관적으로 이해하게 한다.</li> <li>• 곱셈표를 이용해서 두 수를 바꾸어 곱해도 곱이 같음을 비교하는 활동을 통하여 곱셈의 교환법칙을 직관적으로 이해하게 한다.</li> </ul>

셋째, 3~4학년군과 5~6학년군에서 계산의 어렵과 관련된 성취기준을 [표 1-5]와 같이 수정 및 부분 삭제했다. 이를 통해 2015 개정 교육과정에서 어렵셈과 관련된 성취기준이 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 분산되어 있어 교과서 개발 시 다소 억지스럽게 자연수의 어렵셈이 구현되었다는 현장의 비판을 개선하고자 했다. 더불어 5~6학년군에서 소수의 곱셈과 나눗셈의 계산 결과를 어렵하라는 성취기준을 삭제하고, 소수의 곱셈과 나눗셈에서 무조건 계산 결과를 어렵하기보다 어렵셈의 필요성과 유용성을 인식할 수 있는 문제 상황에서 어렵셈을 사용하도록 성취기준 적용 시 고려 사항에 제시했다.

[표 1-5] 계산의 어렵과 관련된 성취기준의 변화

구분	2015 개정	2022 개정
3~4학년군	<p>[4수01-04] 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈에서 계산 결과를 어렵할 수 있다.</p> <p>[4수01-06] 곱하는 수가 한 자리 수 또는 두 자리 수인 곱셈에서 계산 결과를 어렵할 수 있다.</p> <p>&lt;교수·학습 방법 및 유의 사항&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 하기 전에 계산 결과를 어렵해 보고, 어려운 값을 이용하여 계산 결과가 타당한지 확인해보게 한다.</li> </ul>	<p>㉟ 자연수의 어렵셈</p> <p>[4수01-08] 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 관련한 여러 가지 상황에서 어렵셈을 할 수 있다.</p> <p>&lt;성취기준 적용 시 고려 사항&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 하기 전에 계산 결과를 어렵하기, 어려운 값을 이용하여 계산 결과가 타당한지 확인하기, 어렵셈이 필요한 실생활 상황의 문제를 해결하기 등을 다룰 수 있다.</li> </ul>



5~6학년군	[6수01-16] 소수의 곱셈과 나눗셈의 계산 결과를 어렵할 수 있다.	<p>성취기준 삭제</p> <p>&lt;성취기준 적용 시 고려 사항&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>소수의 곱셈과 나눗셈에서 계산 결과를 어렵할 필요가 있는 상황, 정확한 계산 대신에 어렵셈으로 비교가 가능한 상황 등 어렵셈이 필요한 여러 가지 실생활 상황을 제시하여 어렵셈의 필요성과 유용성을 알게 한다.</li> </ul>
--------	-----------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

넷째, 5~6학년군 측정 영역에 포함되었던 ‘수의 범위/어림하기(올림, 버림, 반올림)’을 5~6학년군 수와 연산 영역으로 이동했으며, 내용 요소명 중 ‘어림하기’를 ‘올림, 버림, 반올림’으로 구체화했다([표 1-6] 참조).

[표 1-6] 수의 범위, 어림하기 성취기준의 변화

2015 개정	2022 개정
<p>[측정 영역]</p> <p>① 어림하기</p>	<p>[수와 연산 영역]</p> <p>② 수의 범위와 올림, 버림, 반올림</p>

다섯째, 5~6학년군 ‘약수와 배수의 관계’에 대한 성취기준([6수01-04] 약수와 배수의 관계를 이해한다.)을 삭제하고, 성취기준 적용 시 고려 사항에 ‘약수와 배수를 학습하는 과정에서 약수와 배수의 관계를 이해하게 한다.’로 내용을 약화시켰다(교육부, 2022b). 이를 통해 ‘약수와 배수의 관계’를 별도의 차시로 다루기보다 약수와 배수를 학습하는 과정에서 이를 이해하는 정도의 수준으로 다룰 수 있도록 하였다.

## (2) 변화와 관계

변화와 관계 영역의 주요 변화를 살펴보면 [표 1-7]과 같다.

[표 1-7] 변화와 관계 영역의 주요 변화

1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
<ul style="list-style-type: none"> <li>규칙을 찾고 만드는 활동에서 학생의 주도적 학습 강조</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>등호와 동치 관계 관련 성취기준 신설</li> <li>계산식의 배열에서 규칙 찾기 관련 성취기준 부분 수정</li> </ul>	

첫째, 1~2학년군에서 규칙을 찾고 만드는 활동에서 학생의 주도적 학습을 강조했다. 이를 위해 성취기준 “[2수02-02] 자신이 정한 규칙에 따라 물체, 무늬, 수 등을 배열할 수 있다.”와 연계하여, 성취기준 적용 시 고려 사항에 “학생이 스스로 만든 규칙에 따라 물체, 무늬, 수 등을 배열하는 활동을 통해 수학에 대한 흥미를 느끼게 할 수 있다.”라는 내용을 명시하였다(교육부, 2022b).

둘째, 3~4학년군에 ‘등호와 동치 관계’ 관련 성취기준을 [표 1-8]과 같이 신설했다. 이를 통해 학생들이 수와 식을 계산해야 할 대상으로만 다루기보다 등호의 의미를 토대로 두 양의 관계를 나타내는 표현으로 식을 이해하고, 나아가 연산에 대한 이해를 확장하기를 기대했다. 이를 위해, 크기가 같은 두 양의 관계를 탐구하는 활동의 예를 성취기준 해설에 제시했다. 그리고 성취기준 적용

시 고려 사항에는 등호가 사용된 식이 옳은지 판단할 때는 ‘수 감각이나 학생이 직관적으로 이해하고 있는 연산의 성질’을 이용하여 비교할 수 있다는 방안을 제시하여 등호를 기준으로 두 양의 관계를 추론할 수 있음을 설명했다.

[표 1-8] 등호와 동치 관계에 대한 성취기준

성취기준	② 등호와 동치 관계 [4수02-03] 등호를 사용하여 크기가 같은 두 양의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.
성취기준 해설	[4수02-03] 등호(=)의 의미를 토대로 구체물, 그림 등을 사용하여 주어진 식이 옳은지 판단하는 활동, 크기가 같은 두 양을 찾는 활동 등을 통해 동치 관계를 이해하게 한다.
성취기준 적용 시 고려 사항	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 동치 관계는 두 자리 수의 범위에서 다룬다.</li> <li>• 등호가 사용된 식이 옳은지 판단할 때는 수 감각이나 학생이 직관적으로 이해하고 있는 연산의 성질을 이용하여 두 양이 서로 같은지 비교하게 할 수 있다.</li> </ul>

셋째, 3~4학년군 ‘계산식의 배열에서 규칙 찾기’ 관련 성취기준을 [표 1-9]와 같이 부분 수정했다. 구체적으로 2015 개정 수학과 교육과정에서 ‘규칙적인 계산식의 배열에서 계산 결과의 규칙을 찾고’라는 부분이 교과서로 구현되는 과정에서 계산식에 제시된 ‘수’의 규칙에만 치중하는 경향이 많다는 전문가 의견 및 현장의 의견을 반영하여 2022 개정 수학과 교육과정에서는 문장 일부를 수정하여 계산식의 배열을 아우르는 규칙을 추론하는 경험을 제공하고자 했다. 더불어 성취기준 해설에는 ‘다양한 규칙을 찾을 수 있는 계산식의 배열’과 ‘수의 성질을 탐구할 수 있는 계산식의 배열’을 다룬다고 제시하여 다양한 유형의 계산식 배열을 다루게 했다.

[표 1-9] 계산식의 배열과 관련된 성취기준의 변화

2015 개정	2022 개정
[4수04-02] 규칙적인 계산식의 배열에서 계산 결과의 규칙을 찾고, 계산 결과를 추측할 수 있다.	<p>[4수02-02] 계산식의 배열에서 규칙을 찾고, 계산 결과를 추측할 수 있다.</p> <p>&lt;성취기준 해설&gt;</p> <p>[4수02-02] 다양한 규칙을 찾을 수 있는 계산식의 배열, 수의 성질을 탐구할 수 있는 계산식의 배열을 다룬다.</p>

### (3) 도형과 측정

도형과 측정 영역의 주요 변화를 살펴보면 [표 1-10]과 같다.

[표 1-10] 도형과 측정 영역의 주요 변화

1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 구체물의 길이를 ‘약’으로 표현하기 관련 내용 약화</li> <li>• 오각형, 육각형 관련 성취기준 수정 및 부분 삭제</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 평면도형에서 점의 이동 관련 성취기준 신설</li> <li>• 원으로 다양한 무늬 꾸미기, 규칙적인 무늬 만들기 관련 성취기준 수정 및 내용 약화</li> <li>• 주어진 각과 크기가 같은 각 그리기 성취기준 삭제</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 원주율에 대한 고려 사항 수정</li> </ul>

첫째, 1~2학년군에서 구체물의 길이를 ‘약’으로 표현하기와 관련된 내용을 약화하여 제시했다. 구체적으로 2015 개정 수학과 교육과정에 제시되었던 성취기준 “[2수03-08] 구체물의 길이를 재는 과정에서 자의 눈금과 일치하지 않는 길이의 측정값을 ‘약’으로 표현할 수 있다.”를 삭제하고, 성취기준 적용 시 고려 사항에 “구체물의 길이를 재는 과정에서 자의 눈금과 일치하지 않는 길이의 측정값을 ‘약’으로 표현할 수 있음을 알게 한다(교육부, 2022b).”라고 제시했다.

둘째, 1~2학년군에서 다루었던 오각형, 육각형과 관련된 성취기준을 [표 1-11]과 같이 부분 수정하여 1~2학년군에서 다루는 내용의 학습량을 경감했다. 이에 따라 오각형과 육각형은 3~4학년군의 다각형 단원에서 학습하게 되었다.

[표 1-11] 삼각형, 사각형의 공통점과 관련된 성취기준의 변화

2015 개정	2022 개정
[2수02-05] 삼각형, 사각형에서 각각의 공통점을 찾아 말하고, 이를 일반화하여 오각형, 육각형을 알고 구별할 수 있다.	[2수03-05] 삼각형, 사각형에서 각각의 공통점을 찾아 말할 수 있다.

셋째, 3~4학년군에서 여러 가지 원으로 다양한 무늬 꾸미기, 평면도형의 이동에서 규칙적인 무늬 만들기 관련 내용을 성취기준에서 삭제했다. 대신 관련 내용을 성취기준 적용 시 고려 사항에 제시하여 수학의 아름다움을 느낄 수 있는 활동의 예로 다룰 수 있게 하였다([표 1-12] 참조).

[표 1-12] 원으로 다양한 무늬 꾸미기, 규칙적인 무늬 만들기 관련된 성취기준의 변화

2015 개정	2022 개정
[4수02-07] 컴퍼스를 이용하여 여러 가지 크기의 원을 그려서 다양한 모양을 꾸밀 수 있다. [4수02-05] 평면도형의 이동을 이용하여 규칙적인 무늬를 꾸밀 수 있다.	[4수03-07] 컴퍼스를 이용하여 여러 가지 크기의 원을 그릴 수 있다. <성취기준 적용 시 고려 사항> • 평면도형의 이동, 원 그리기 등을 이용하여 여러 가지 모양이나 무늬 만들기 활동을 통해 수학의 아름다움을 느끼게 할 수 있다.

넷째, 3~4학년군 ‘평면도형의 이동’에 ‘점의 이동’ 관련 성취기준 “[4수03-05] 평면에서 점의 이동에 대해 위치와 방향을 이용하여 설명할 수 있다.”를 신설했다(교육부, 2022b). 이를 통해 우리나라의 초등학교 수학에서 공간 감각, 위치와 방향에 대한 내용이 더욱 강조되어야 한다는 기초 연구의 주장(이경화 외 13인, 2020)을 반영하고, 미래 지향적 학습 내용을 교육과정에 포함했다.

다섯째, 학습량 경감 차원에서 주어진 각도와 크기가 같은 각 그리기와 관련된 성취기준 “[4수03-13] 주어진 각도와 크기가 같은 각을 그릴 수 있다.”를 삭제했다(교육부, 2022b). 이에 3~4학년군에서 ‘각도’를 다룰 때는 각도기를 이용하여 각의 크기를 측정하고 어림하는 수준으로 다루게 했다.

여섯째, 원주율에 대한 고려 사항을 [표 1-13]과 같이 수정했다. 구체적으로 2015 개정 수학과 교육과정에서는 원주율과 관련하여 원주율을 3, 3.1, 3.14 등으로 상황에 따라 적절하게 선택하여 사용하게 했다(교육부, 2015). 그러나 이 경우 학생들이 원주율이 모든 원에서 일정한 값이라는 의미를 이해하기 어렵다는 전문가 의견 및 현장 의견을 반영하여 [표 1-13]과 같이 원주율의 의미를 알고 원주율의 근삿값으로 3.14를 사용하게 했다. 그리고 성취기준 적용 시 고려 사항을 통해 ‘원

주율, 원주, 원의 넓이, 입체도형의 겹넓이와 부피 등을 구할 때 복잡한 계산은 계산기를 사용하게 한다'라고 명시하였다.

[표 1-13] 원주율과 관련된 성취기준의 변화

2015 개정	2022 개정
<p>&lt;교수·학습 방법 및 유의 사항&gt;</p> <p>원주율을 나타내는 3, 3.1, 3.14 등은 정확한 값이 아님을 알고 상황에 따라 적절하게 선택하여 사용할 수 있게 한다.</p>	<p>&lt;성취기준 해설&gt;</p> <p>[6수03-15] 여러 가지 원에서 (원주)÷(지름)의 값을 구하여 모든 원에서 원주율이 일정함을 이해하게 하고, 원주율의 근삿값으로 3.14를 사용하게 한다.</p>

#### (4) 자료와 가능성

자료와 가능성 영역의 주요 변화를 살펴보면 [표 1-14]와 같다.

[표 1-14] 자료와 가능성 영역의 주요 변화

1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
	<ul style="list-style-type: none"> <li>통계적 문제해결 과정 성취기준 개선</li> <li>그래프 그리기에서 공학 도구의 활용 강조</li> <li>자료의 수집, 정리, 해석 활동 강조</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>그림그래프에 대한 성취기준 삭제</li> <li>통계적 문제해결 과정 성취기준 개선</li> <li>그래프 그리기에서 공학 도구의 활용 강조</li> <li>가능성 관련 성취기준 개선 및 자료를 이용한 가능성 예상 활동 제시</li> <li>자료의 수집, 정리, 해석 활동 강조</li> </ul>

첫째, 그림그래프의 지도 시기를 조정했다. 구체적으로 2015 개정 수학과 교육과정에서 3~4학년군과 5~6학년군에 다루던 그림그래프를 2022 개정 수학과 교육과정에서는 3~4학년군에서만 다루도록 성취기준을 수정했다. 또한, 성취기준 적용 시 고려 사항에 '그림그래프를 그릴 때 항목의 이름과 수량의 단위를 명확히 인식하고, 자료의 개수에 따라 그림이 나타내는 단위를 적절히 선택하게 한다.'라는 내용을 제시하여(교육부, 2022b) 자료와 자료의 표현에 대한 이해를 강조했다.

둘째, 통계적 문제해결 과정 관련 성취기준을 개선했다. 학생이 스스로 문제를 설정하는 과정은 통계적 문제해결 능력과 통계적 소양 측면에서 매우 중요하다. 2022 개정 수학과 교육과정에서는 학생들의 통계적 소양 및 데이터 소양을 함양하고자 하는 방향성을 반영하여 그동안 학교 수학에서 잘 다루어지지 않았던 '문제 설정'을 강조했다([표 1-15] 참조).

[표 1-15] 통계적 문제해결 과정과 관련된 성취기준의 변화

구분	2015 개정	2022 개정
3~4학년군	<p>① 자료의 정리</p> <p>[4수05-03] 여러 가지 자료를 수집, 분류, 정리하여 자료의 특성에 맞는 그래프로 나타내고, 그래프를 해석할 수 있다.</p>	<p>① 자료의 수집과 정리</p> <p>[4수04-03] 탐구 문제를 해결하기 위해 자료를 수집, 정리하여 막대그래프나 꺾은선그래프로 나타내고 해석할 수 있다.</p>
5~6학년군	<p>① 자료의 정리</p> <p>[6수05-04] 자료를 수집, 분류, 정리하여 목적에 맞는 그래프로 나타내고, 그래프를 해석할 수 있다.</p>	<p>① 자료의 수집과 정리</p> <p>[6수04-03] 탐구 문제를 설정하고, 그에 맞는 자료를 수집, 정리하여 적절한 그래프로 나타내고 해석할 수 있다.</p>

셋째, 그래프 그리기 활동에서 공학 도구의 활용을 강조했다. 2022 개정 수학과 교육과정에서는 기초 소양 중 디지털 소양의 함양과 관련하여 성취기준 적용 시 고려 사항에 그래프를 그릴 때 공학 도구를 활용할 수 있음을 제시했다([표 1-16] 참조). 이를 통해 학생들이 그래프를 그리는 활동 자체에 너무 많은 시간을 소비하기보다 자료를 직접 수집, 정리, 해석하는 일련의 통계적 문제해결 과정에 참여할 수 있기를 기대한다.

[표 1-16] 공학 도구 활용 관련 고려 사항

학년군	성취기준 적용 시 고려 사항
3~4학년군	• 막대그래프와 꺾은선그래프를 그릴 때 공학 도구를 사용하게 할 수 있다.
5~6학년군	• 띠그래프와 원그래프를 그릴 때 공학 도구를 사용하게 할 수 있다.

넷째, 초등학교 자료와 가능성 영역 전반에서 자료의 수집, 정리, 해석 활동을 일관되게 강조했다. 구체적으로 ‘주어진 자료’를 ‘자료를 수집하여’로 표현하여 학생들이 주도적으로 자료를 수집, 정리, 해석하며 통계적 소양을 신장할 수 있도록 의도했다([표 1-17] 참조).

[표 1-17] 자료의 수집, 정리, 해석 활동 관련된 성취기준의 변화

구분	2015 개정	2022 개정
1~2학년군	<b>② 표 만들기</b> [2수05-02] 분류한 자료를 표로 나타내고, 표로 나타내면 편리한 점을 말할 수 있다.	<b>① 자료의 정리</b> [2수04-02] 자료를 분류하여 표로 나타내고, 자료를 표로 나타내면 편리한 점을 말할 수 있다.
3~4학년군	<b>① 자료의 정리</b> [4수05-01] 실생활 자료를 수집하여 간단한 그림그래프나 막대그래프로 나타낼 수 있다.	<b>① 자료의 수집과 정리</b> [4수04-01] 자료를 수집하여 그림그래프나 막대그래프로 나타내고 해석할 수 있다.
5~6학년군	<b>① 평균</b> [6수05-01] 평균의 의미를 알고, 주어진 자료의 평균을 구할 수 있으며, 이를 활용할 수 있다. <b>② 자료의 정리</b> [6수05-03] 주어진 자료를 띠그래프와 원그래프로 나타낼 수 있다.	<b>① 자료의 수집과 정리</b> [6수04-01] 평균의 의미를 알고, 자료를 수집하여 평균을 구하고 해석할 수 있다. [6수04-02] 자료를 수집하여 띠그래프나 원그래프로 나타내고 해석할 수 있다.

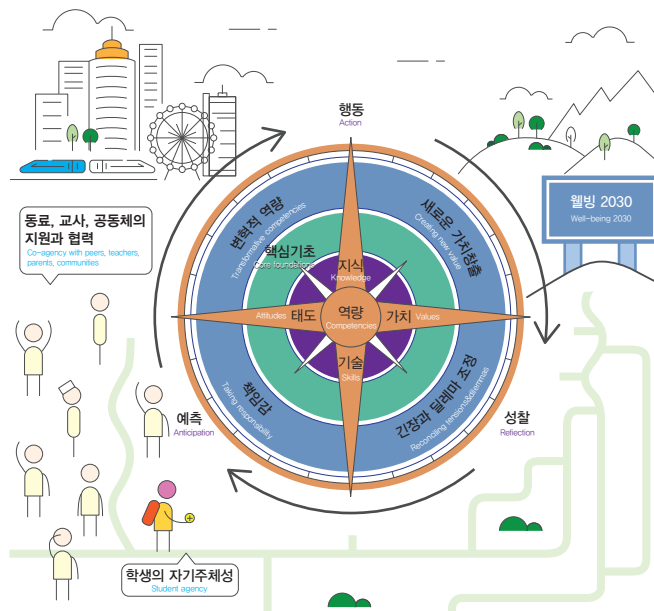
다섯째, 5~6학년군 ‘가능성’ 관련 성취기준을 개선했으며, 자료를 이용하여 가능성을 예상하는 활동을 제시하였다. 가능성 관련 성취기준의 변화를 살펴보면 [표 1-18]과 같다. 구체적으로 2022 개정 수학과 교육과정에서는 ‘사건이 일어날 가능성의 표현’에 관한 성취기준을 [표 1-18]과 같이 정선하여 가독성을 높였고, 가능성을 표현하는 말이나 수에 대해서는 성취기준 해설 또는 성취기준 적용 시 고려 사항에 구체적으로 제시했다. 그리고 우리나라 교육과정에서 가능성에 대한 지도 내용이 제한적이라는 비판을 반영하여 성취기준 [6수04-06]을 통해 자료를 이용하여 가능성을 예상하고, 가능성에 근거하여 적절하게 판단하는 활동을 성취기준 해설에 구체적으로 제시하였다.

[표 1-18] 가능성 관련 성취기준의 변화

구분	2015 개정	2022 개정
성취기준 개선	<p>[6수05-05] 실생활에서 가능성과 관련된 상황을 ‘불가능하다’, ‘~아닐 것 같다’, ‘반반이다’, ‘~일 것 같다’, ‘확실하다’ 등으로 나타낼 수 있다.</p> <p>[6수05-06] 가능성을 수나 말로 나타낸 예를 찾아보고, 가능성을 비교할 수 있다.</p> <p>[6수05-07] 사건이 일어날 가능성을 수로 표현할 수 있다.</p>	<p>[6수04-04] 사건이 일어날 가능성을 말로 표현하고 비교할 수 있다.</p> <p>[6수04-05] 사건이 일어날 가능성을 수로 나타낼 수 있다.</p>
가능성 관련 활동 편성		<p>[6수04-06] 자료를 이용하여 가능성을 예상하고, 가능성에 근거하여 적절한 판단을 내릴 수 있다.</p> <p>&lt;성취기준 해설&gt;</p> <p>[6수04-06] 제비뽑기, 동전 던지기, 주사위 던지기, 회전판 돌리기 등과 같은 간단한 실험 결과를 나타낸 표나 그래프를 보고 사건이 일어날 가능성을 비교하고 대략적으로 예상하게 한다.</p>

### ③ 수학 교과 역량 및 기초 소양

2022 개정 교육과정은 디지털 전환, 기후·생태환경의 변화 등으로 급변하는 사회에 대응하기 위해 미래 사회에서 요구하는 핵심역량의 함양과 기초 소양의 신장을 강조한다(교육부, 2022a). 학습 나침반으로 은유되는 OECD 교육 2030의 학습 틀은 [그림 1-3]에 제시한 바와 같이 역량(Competencies)을 중심에 놓고, 역량을 구성하는 것은 지식, 기술, 태도, 가치임을 보여 주고 있다. 이들 역량을 핵심 기초 소양(Core Foundations)이 둘러싸고 있어, 인지적 소양, 건강 소양, 사회·정서적 소양 등의 핵심 기초가 모든 역량 개발의 토대임을 강조한다. 새로운 가치 창출, 긴장과 딜레마 조정, 책임 의식으로 설명되는 변혁적 역량이 핵심기초 소양을 감싸고 있다(OECD, 2019).



[그림 1-3] 경제 협력 개발 기구(OECD) 학습 나침반 2030(OECD, 2019)



## 1 수학 교과 역량

### 가. 수학 교과 역량의 개정 배경

#### (1) 특징

핵심역량은 성공적인 삶을 살기 위하여 갖춰야 할 역량으로 OECD(2005)에서 진행한 DeSeCo (Definition and Selection of Competencies) 프로젝트를 통해서 사용되기 시작했으며, 우리나라는 2015 개정 교육과정에서 핵심역량의 함양을 본격적으로 강조하였다. 구체적으로 2015 개정 교육과정은 학생들의 핵심역량 함양을 목표로 총론 차원의 핵심역량(core competency)과 각 교과와의 관점에서 특화된 교과 역량을 선정하여 구체화했다. 그에 따라 수학과와 경우 수학 교과 역량을 ‘수학 교육을 통해 학습자가 길러야 할 기본적인고 필수적인 능력 또는 특성’으로 정의하고, ‘문제해결’, ‘추론’, ‘창의·융합’, ‘의사소통’, ‘정보처리’, ‘태도 및 실천’의 총 6가지 수학 교과 역량을 선정했다(교육부, 2015).

2022 개정 교육과정에서도 핵심역량을 강조하는 기초를 그대로 유지한다. 그에 따라 2022 개정 교육과정 초·중등학교 교육과정 총론에서 ‘미래 사회가 요구하는 핵심역량을 함양하여 포용성과 창의성을 갖춘 주도적인 사람’으로의 성장을 강조했고(교육부, 2022a), [그림 1-4]의 여섯 가지 핵심역량을 제시했다.

<b>자기관리 역량</b> 자아정체성과 자신감을 가지고 자신의 삶과 진로를 스스로 설계하며 이에 필요한 기초 능력과 자질을 갖추어 자기주도적으로 살아가갈 수 있음.	<b>지식정보처리 역량</b> 문제를 합리적으로 해결하기 위하여 다양한 영역의 지식과 정보를 깊이 있게 이해하고 비판적으로 탐구하며 활용할 수 있음.	<b>창의적 사고 역량</b> 폭넓은 기초 지식을 바탕으로 다양한 전문 분야의 지식, 기술, 경험을 융합적으로 활용하여 새로운 것을 창출할 수 있음.
<b>심미적 감성 역량</b> 인간에 대한 공감적 이해와 문화적 감수성을 바탕으로 삶의 의미와 가치를 성찰하고 향유할 수 있음.	<b>협력적 소통 역량</b> 다른 사람의 관점을 존중하고 경청하는 가운데 자신의 생각과 감정을 효과적으로 표현하며 상호협력적인 관계에서 공동의 목적을 구현할 수 있음.	<b>공동체 역량</b> 지역·국가·세계 공동체의 구성원에게 요구되는 개방적·포용적 가치와 태도로 지속 가능한 인류 공동체 발전에 적극적이고 책임감을 있게 참여함.

[그림 1-4] 2022 초·중등학교 교육과정 총론에서 제시한 핵심역량

총론의 방향성을 반영하여 2022 개정 수학과 교육과정에서도 2015 개정 수학과 교육과정에서 제안된 수학 교과 역량의 적용 실태를 조사하고, 각각의 역량을 미래 지향적 관점에서 비판적으로 검토하여 수학 교과 역량의 의미와 하위 범주를 정교화하였다. 구체적으로 2022 개정 수학과 교육과정에서는 수학 교과 역량을 ‘문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리’의 총 5가지로 재구성하고, 각각의 교과 역량은 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 아우르는 의미로 규정했다(이경하 외 50인, 2022).

#### 나. 수학 교과 역량의 하위 범주

수학 교과 역량의 의미가 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 아우르는 의미로 확장됨에 따라, 각각의 범주에 대한 의미를 규정할 필요가 있다. 따라서 교육과정에서 의도하는 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도 세 가지 범주의 의미는 [표 1-19]와 같다. 성취기준은 지식·이해, 과정·기능, 가

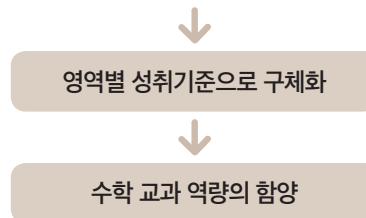
치·태도의 세 가지 범주에 근거하여 구체화되고, 궁극적으로 수학 교과 역량을 함양할 수 있도록 설계되었다.

#### 다. 교육과정에 제시된 수학 교과 역량

2022 개정 수학과 교육과정에서는 수학 교과 역량을 교육과정 전반에 제시하여 이전 교육과정보다 적극적인 형태로 역량의 함양을 도모하는 교육과정을 추구하였다. 구체적으로 2022 개정 수학과 교육과정에서는 수학과 목표, 내용 영역별 성취기준, 교수·학습 방법 및 평가 전반에서 수학 교과 역량을 반영하였으며 이를 통해 현장의 수학 교수·학습 전반에서 역량 함양을 위한 교육이 구현되기를 기대한다. 교육과정에서 의도한 수학 교과 역량의 구현 방안을 정리하면 [표 1-20]과 같다.

[표 1-19] 2022 교육과정에서 의도하는 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도의 의미

지식·이해	과정·기능	가치·태도																
<ul style="list-style-type: none"><li>• 수학 교과에서 지도하는 개념적, 방법적 지식</li><li>• 수학적 개념·원리·법칙, 수학적 지식, 수학적 사실</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• 수학의 개념, 원리, 법칙 등을 학습할 때 다섯 가지 교과 역량이 발현되는 사고 과정이나 기능을 보여주는 구체적인 행동</li><li>• 교과 역량별 과정·기능의 예</li></ul> <table><tr><td>문제해결</td><td>문제해결하기</td></tr><tr><td>추론</td><td>알기, 탐구하기, 판단하기, 정당화하기, 계산하기</td></tr><tr><td>의사소통</td><td>표현하기, 설명하기</td></tr><tr><td>연결</td><td>수학 개념·원리·법칙들을 연결하기, 실생활에 수학 연결하기</td></tr><tr><td>정보처리</td><td>자료 처리하기, 교구나 공학 도구 이용하기</td></tr></table>	문제해결	문제해결하기	추론	알기, 탐구하기, 판단하기, 정당화하기, 계산하기	의사소통	표현하기, 설명하기	연결	수학 개념·원리·법칙들을 연결하기, 실생활에 수학 연결하기	정보처리	자료 처리하기, 교구나 공학 도구 이용하기	<ul style="list-style-type: none"><li>• 수학의 가치를 인식하는 측면과 수학적 태도의 두 범주를 포함</li></ul> <table><tr><th>구분</th><th>가치·태도</th></tr><tr><td>수학 가치 인식</td><td>수학의 유용성/필요성/가치 인식, 수학적 표현의 편리함 인식, 수학에 대한 흥미와 관심</td></tr><tr><td>수학 태도 함양</td><td>문제의 풀이 과정과 결과를 반성하는 태도, 체계적으로 사고하여 합리적으로 의사 결정하는 태도, 수학적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도</td></tr></table>	구분	가치·태도	수학 가치 인식	수학의 유용성/필요성/가치 인식, 수학적 표현의 편리함 인식, 수학에 대한 흥미와 관심	수학 태도 함양	문제의 풀이 과정과 결과를 반성하는 태도, 체계적으로 사고하여 합리적으로 의사 결정하는 태도, 수학적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도
문제해결	문제해결하기																	
추론	알기, 탐구하기, 판단하기, 정당화하기, 계산하기																	
의사소통	표현하기, 설명하기																	
연결	수학 개념·원리·법칙들을 연결하기, 실생활에 수학 연결하기																	
정보처리	자료 처리하기, 교구나 공학 도구 이용하기																	
구분	가치·태도																	
수학 가치 인식	수학의 유용성/필요성/가치 인식, 수학적 표현의 편리함 인식, 수학에 대한 흥미와 관심																	
수학 태도 함양	문제의 풀이 과정과 결과를 반성하는 태도, 체계적으로 사고하여 합리적으로 의사 결정하는 태도, 수학적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도																	



[표 1-20] 2022 교육과정에서 의도한 수학 교과 역량의 구현 방안

구분	구현 방안
1. 수학과 목표를 교과 역량 중심으로 기술함.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 2022 개정 수학과 교육과정에서는 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도가 어우러진 것으로 제시하고 5가지 수학 교과 역량 각각에 대한 함양을 세부 목표로 제시함.</li> </ul>
2. 성취기준이 교과 역량을 드러내도록 구성함.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 내용 체계를 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도의 세 범주로 제시하고, 이를 결합한 형태로 성취기준을 제시함.</li> <li>• 성취기준에 교과 역량이 반영되어 있지 않아 역량 교육이 제대로 이루어지기 어렵다는 교육 현장의 의견(김동원 외 9인, 2020)을 반영, 교과 역량 함양이 실효성을 갖도록 성취기준에 반영함.</li> </ul>



3. 교과 역량 함양을 위한 교수·학습 방법을 제시함.	• 2022 개정 수학과 교육과정에서 교과 역량의 세부 범주는 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도이므로, 교과 역량 함양을 위해 교사가 수학 수업에서 무엇을 해야 하는지를 안내할 수 있도록 교수·학습 방법을 제시함.
4. 수학 교과 역량의 평가에 대한 안내 사항을 평가 방법에 제시함.	• 교과 역량이 목표로 선정되어 수학 교육의 방향을 주도하지만, 평가는 지식 위주로만 진행되고 역량을 평가하는 것이 무엇인지 명료하지 않다는 교육 현장의 의견(김동원 외 9인, 2020)을 반영, 수학 교과 역량을 평가할 때의 고려 사항에 제시함.

## 라. 수학 수업에서 수학 교과 역량을 구현하는 방안

2022 개정 수학과 교육과정은 교육과정 전반에서 수학 교과 역량의 함양을 강조하고 있다. 이에 수학 교과 역량별 교수·학습 방법을 살펴보면 [표 1-21]과 같다.

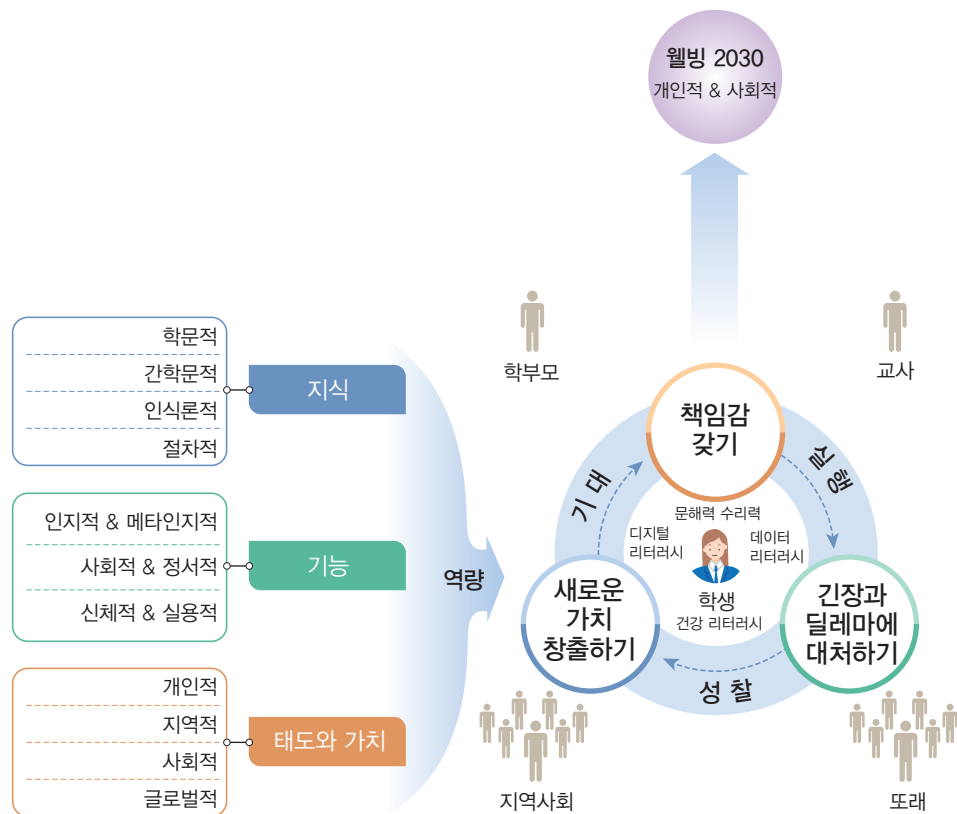
[표 1-21] 2022 교육과정에서 강조하는 교과 역량별 교수·학습 방법

교과 역량	교수·학습 방법
문제해결	㉠ 수학의 개념, 원리, 법칙을 이용하여 해결 가능한 문제를 학생에게 제시한다. 이때 다양한 방법으로 해결 가능한 문제, 여러 가지 해답이 나올 수 있는 문제 등을 활용할 수 있다. ㉡ 문제에 주어진 조건과 정보를 분석하고 적절한 문제해결 계획을 수립하고 실행하며 문제해결 과정을 반성하도록 구체적인 발문과 권고를 제시한다. ㉢ 문제해결 과정 및 결과의 의미를 재해석하여 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하게 한다. ㉤ 성공적인 문제해결 경험을 바탕으로 적극적이고 자신감 있게 문제해결에 참여하게 하고, 단번에 답이 나오지 않는 문제라도 끈기 있게 도전하여 성취감을 느끼게 한다.
추론	㉠ 관찰, 실험, 측정 등 구체적 조작 활동을 통해 수학의 개념, 원리, 법칙에 흥미와 관심을 갖고 다양한 방법으로 탐구하고 이해하게 한다. ㉡ 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 통해 수학적 추측을 제기하고 정당화하며, 수학적 증거와 논리적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 갖게 한다. ㉢ 수학의 개념, 원리, 법칙을 도출하는 과정과 수학적 절차를 논리적이고 체계적으로 수행하고 반성하게 한다.
의사소통	㉠ 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 정확하게 사용하고 표현끼리 변환하게 한다. ㉡ 학생이 자신의 사고와 전략을 수학적 표현으로 나타내고 설명하면서 수학적 표현의 편리함을 인식하게 한다. ㉢ 학생 간 상호 작용과 질문이 활발한 교실 문화를 조성하고 수학적으로 의미 있는 의사소통이 이루어지도록 적절한 과제를 제시하고 안내한다. ㉤ 수학적 아이디어에 대해 상호 작용하는 과정에서 타인을 배려하고 의견을 존중하는 태도를 기르게 한다.
연결	㉠ 영역이나 학년(군) 내용 간에 관련된 수학의 개념, 원리, 법칙 등을 유기적으로 연계하여 새로운 지식을 생성하면서 창의성을 기르게 한다. ㉡ 수학과 실생활, 사회 및 자연 현상, 타 교과와 내용을 연계하는 과제를 활용하여 수학의 유용성을 인식하게 한다.
정보처리	㉠ 실생활 및 수학적 문제 상황에서 자료를 탐색하고 수집하며 수학적으로 처리하여 합리적인 의사 결정을 하는 태도를 기르게 한다. ㉡ 교구나 공학 도구를 활용하여 추상적인 수학 내용을 시각화하고 수학의 개념, 원리, 법칙에 대한 직관적 이해와 논리적 사고를 돕는다. ㉢ 학생이 주도적으로 교구나 공학 도구를 활용하여 탐구하게 한다. ㉤ 계산 기능 함양을 목표로 하지 않는 교수·학습 상황에서는 복잡한 계산을 할 때 공학 도구를 사용할 수 있게 한다.

## 2 기초 소양

### 가. 기초 소양의 의미


소양이란 문화 체제의 상징을 이해하고 사용하는 데 있어서 언어, 숫자, 표상 등을 활용하는 능력으로 일상생활을 위해서 필요할 뿐만 아니라 교과활동의 기초가 된다(온정덕 외 9인, 2020). 교육에서 기초 소양이란 주로 읽기, 쓰기, 셈하기를 중심으로 강조되어 왔다. 그러나 복잡해져가는 미래 사회를 살아가기 위해서는 학생들에게 단순한 지식을 전달하기 보다는 모든 교과 학습을 통해서 가장 근본적인 능력을 길러야 함이 강조되고 있다. OECD(2018)는 교육 2030 프로젝트에서 미래에 질 높은 삶을 살기 위해 학생들에게 필요한 기초적인 능력으로 언어 소양, 수리 소양, 디지털 소양을 강조하고 있다. 이러한 기초 소양을 토대로 책임감 갖기, 새로운 가치 창출하기, 긴장과 딜레마에 대처하기를 포함하는 변혁적 역량을 기르는 것이 중요하다고 설명한다 ([그림 1-5] 참조).



[그림 1-5] OECD의 교육 2030의 학습프레임워크 (OECD, 2018)

2022 개정 교육과정의 총론에서 “모든 학생이 학습의 기초인 언어·수리·디지털 기초 소양을 갖추 수 있도록 하여 학교 교육과 평생 학습에서 학습을 지속할 수 있게 한다.”로 제시되어 있다. 이는 2022 개정 교육과정에서 다양한 교과를 학습하는 데 기초가 되는 언어, 수리, 디지털 소양을 기초 소양으로 강조하여 총론에 반영한 것이며 이러한 기초 소양은 특정 교과에서 배울 수 있는 지식이 아닌 범교과적인 능력으로 교과뿐만 아니라 일상생활에서도 활용할 수 있어야 한다. 이러한 기초 소양은 특정 교과에서 배울 수 있는 지식이 아닌 범교과적인 능력으로 교과뿐만 아니라 일상생활에서도 활용할 수 있어야 한다. 언어, 수리, 디지털 소양의 의미는 [표 1-22]와 같다(교육부, 2021).

[표 1-22] 2022 개정 교육과정의 기초 소양

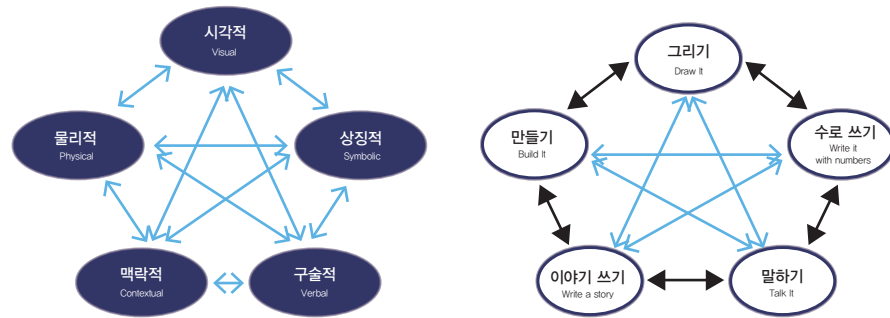
 <p>언어 소양</p>	<p>언어를 중심으로 다양한 기호, 양식, 매체 등을 활용한 텍스트를 대상, 목적, 맥락에 맞게 이해하고, 생산·공유, 사용하여 문제를 해결하고 공동체 구성원과 소통하고 참여하는 능력</p>
 <p>수리 소양</p>	<p>다양한 상황에서 수리적 정보와 표현 및 사고 방법을 이해, 해석, 사용하여 문제해결, 추론, 의사소통하는 능력</p>
 <p>디지털 소양</p>	<p>디지털 지식과 기술에 대한 이해와 윤리의식을 바탕으로, 정보를 수집·분석하고 비판적으로 이해·평가하며 새로운 정보와 지식을 생산·활용하는 능력</p>

#### 나. 언어 소양

미래 사회에서 일상과 학습을 위한 기초 능력 중 문해력(literacy)은 다양한 언어 자료를 활용하는 과정에서 문제를 이해하고 쓸 수 있는 능력을 의미한다. 단순히 문자를 읽고 쓰는 해독의 수준을 넘어, 구체적 언어 사용 맥락에 대해 다양한 언어 자료나 매체를 통한 의사소통에서 문자 기반 이해 및 표현까지 많은 의미로 사용된다. 문해력은 대체로 글을 중심으로 한 개념이지만, 2022 개정 교육과정에서 언어 소양으로 표현되어 있으며 그 활용 범위도 글뿐만 아니라 복합 및 다중매체를 포함한 언어를 사용하는 기초 의사소통 능력이자 삶의 기본 자질로서 보고 있다.

2022 개정 교육과정에서는 언어 소양을 ‘언어를 중심으로 다양한 기호, 양식, 매체 등을 활용한 텍스트를 대상, 목적, 맥락에 맞게 이해하고, 생산·공유, 사용하여 문제를 해결하고 공동체 구성원과 소통하고 참여하는 능력’으로 정의하였다(교육부, 2022a). 수학과와의 교수학습 방향에서도 언어 소양을 기르기 위해 “수학 교과서 읽기, 수학 학습 과정과 결과 쓰기, 문장제 해결 등을 통해 학생들의 언어 소양 함양을 도모한다”고 제시하였다(교육부, 2022b).

수학 교과서에는 다양한 표상이나 매체들이 포함되어 있으므로 학생들은 이를 이해할 수 있어야 한다. 특히, 글, 숫자, 그림과 같은 다양한 표상이 제공되기 때문에, 학생들이 효과적으로 수학 수업에 참여하기 위해서는 다양한 표상이나 매체를 보고 이를 연결하는 과정이 필요하며 이를 통해 개념적, 절차적 이해가 심화됨을 강조한다(NCTM, 2014). [그림 1-6]과 같이 시각적, 상징적, 구술적, 맥락적, 물리적 표상들을 서로 이어갈 수 있는 역량을 표상적 능력(representational competence)이라 한다. 예를 들어 시각적 표상에서는 사과 2개와 배 3개를 모두 합하여 과일 5개로 나타내는 그림으로 그릴 수 있고, 상징적 표상에서는 수식으로 이를 나타내어  $2+3=5$ 로 표현할 수 있다. 구술적 표상에서는 의사소통을 통해서 사과 2개와 배 3개가 합쳐지는 과정을 친구에게 설명할 수 있으며, 맥락적 표상에서는 이를 글로 나타낼 수도 있다. 마지막으로 물리적 표상에서는 연결 모형을 이용하여 2개의 모형과 3개의 모형을 연결하여 5개의 연결 모형을 만들어 보여줄 수 있다. 이러한 각각의 표상들은 학생들이 읽어야 할 다양한 기호, 양식, 매체 등이 되고 이를 연결하는 과정에서 수학적 아이디어를 생산하고 서로 이야기를 나눌 수 있으며, 궁극적으로 짝, 모둠, 학급 전체와 함께 소통하며 공동체를 구성해 나갈 수 있다.



[그림 1-6] 수학에서의 다양한 표상과 예시(NCTM, 2014)

또한, 수학 문제를 해결하는 과정에서 언어 소양을 통해 학생들은 해결 전략을 소개하고 그 전략에 대해 서로의 생각을 나눌 수 있다. 미국의 공통 기준(Common Core Standards)에는 학생들의 수학 학습을 위한 8가지 실행 기준이 제시되어 있다([표 1-23] 참조).

[표 1-23] 수학 학습을 위한 8가지 실행 기준

#### 수학 학습을 위한 실행 기준

1. 문제를 이해하고 인내심을 갖고 문제를 해결한다.
2. 추상적으로 그리고 수량적으로 추론한다.
3. 수학적으로 타당한 논의를 구성하며 다른 사람의 추론을 비평한다.
4. 수학으로 모델링한다.
5. 전략적으로 적절한 도구를 사용한다.
6. 정확성에 주의한다.
7. 수학적 구조를 찾고 이용한다.
8. 반복되는 추론에서 수학적으로 변하지 않는 것을 찾고 표현한다.

그 중 세 번째는 “수학적으로 타당한 논의를 구성하며 다른 사람의 추론을 비평한다”이다(CCSSI, 2010). 자신의 사고를 표상이나 표상에 대한 행동, 구술이나 기술을 통해서 설명할 수 있는 능력이 필요함은 물론, 다른 사람의 주장을 듣거나 읽고, 주장이 타당한지 판단하며, 유용한 질문으로 주장을 명확히 하거나 개선할 수 있어야 한다. 예를 들어, 평행사변형의 성질을 탐구하는 과정에서 학생들이 도형판에 고무줄을 활용한다면, 학생들은 도형판과 고무줄로 만들어진 평행사변형과 이를 조작하는 과정에 대한 설명을 구두로 할 수 있다. 이어서, 학생들이 각의 크기를 재거나 변의 길이를 재어 서로 비교하며 평행사변형의 성질을 탐구할 때 ‘마주보는 각의 크기나 마주보는 변의 길이가 같다’는 성질을 서로 이야기를 나누는 과정에서 수학적 주장이 타당한지 판단하고 이를 보완하는 논의 과정을 거칠 수 있다. 도형판의 한 점을 옮겼을 때 만들어진 도형이 왜 평행사변형이 되지 않는지, 또 평행사변형의 성질을 만족하지 않는지 등과 같은 도형에 관한 개념과 성질에 대한 학습을 대상, 맥락, 목적에 맞게 언어적 소양을 통해서 참여할 수 있다.

#### 다. 수리 소양

수리 소양과 수학은 구분하기가 모호할 수 있다. 수리 소양은 일상생활 학습 상황 등에서 수학적 과제를 해결하기 위하여, 수학적 정보 및 아이디어를 이해하고 이를 활용하여 계산, 문제해결, 의사소통하는 능력을 의미한다(박선화 외 5인, 2020). 이에 반해, 수학은 추상적이고 정략적 개념을 다루는 체계적인 학문으로 대수학, 기하학, 확률 및 통계 등 하위요소를 포함한다. 수학은 복잡한

문제를 해결하기 위해 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는데 중점을 둔다.

수리 소양은 1959년 영국의 크로우더(Crowther) 보고서에 언어 소양에 대응되는 개념으로 처음 사용되었다(이형주·고호경, 2018). 이후 영국의 코크로프트(Cockcroft) 보고서인 Mathematics Counts를 통해서 수리 소양의 개념은 보다 상세화 되었다. 현대인이 다양한 정보의 홍수의 시대에 살아가기 위해서 필수적인 능력으로 수리 소양의 중요성이 대두되었다. 예를 들어, 버스나 지하철의 시간이나 상품 가격을 계산하고, 뉴스 같은 미디어에서 나오는 수리적 정보를 이해하고 가공할 수 있다. 이처럼 초기에는 실생활에서 수나 연산을 이용하여 실생활에 적합하도록 수학 기능을 활용하고 그래프, 도표, 비율 등 수학적 개념을 나타내는 정보를 이해하고 적용하는 능력으로 수리 소양 또는 수리력으로 정의하였다. ‘Mathematics Counts’ 이후 미국에서도 National Research Council(1989)의 ‘Everybody Counts’를 통해서 수리 소양의 중요성이 강조되었다.

OECD(2016)의 Programme for the International Assessment of Adult Competencies (PIACC)는 실생활에서 수학적 과제에 참여하고 다루기 위해 수학적 정보와 아이디어에 접근, 사용, 해석, 의사소통할 수 있는 능력으로 수리 소양을 정의하였다. PIACC는 수리 소양 관련 행동을 하는 상황, 수학적 요구의 본질에 따라 기대되는 반응, 사용하는 수학적 정보와 아이디어인 내용, 수학적 정보가 표현되고 맥락화되는 형식인 표현, 수리 소양 관련 행동에 참여하면서 갖게 되는 인지적 조작과 비인지적 과정의 5가지 측면으로 수리 소양을 정교화하여 설명한다.

또한, 정의적 측면을 수리 소양에 포함해야 한다는 것은 National Research Council(2001)의 ‘Adding it up’에서 ‘수학적 능력(Mathematical proficiency)’의 하위요소 중 ‘생산적 태도’로 나타난다. 수학적 능력이란 수학을 성공적으로 학습하는 데 필요한 수학의 전문지식(expertise), 역량(competence), 지식(knowledge) 및 재능(facility)을 포함한다. 하위 요소를 구체적으로 살펴보면, 수학적 능력의 개념은 다음과 같이 다섯 가지 요소로 구성되어 있다.

- 개념적 이해: 수학적 개념과 연산 및 관계에 대한 포괄적 이해
- 절차적 유창성: 절차를 유연하고 정확하게 효율적이고 적절하게 수행하는 능력
- 전략적 역량: 수학 문제를 형식화하고 표현하며 해결하는 능력
- 조정 가능한 추론: 논리적 사고, 반성, 설명 및 정당화를 할 줄 아는 능력
- 생산적 태도: 성실함과 자기 효능에 대한 믿음을 갖고 수학을 합리적이고 유용하며 가치 있는 것으로 보는 습관적 성향

이들은 수학적 능력의 발달에 있어 서로 상호의존적인 역할을 하며 수학적 능력을 구성하는 지식, 기능, 능력 및 신념을 논하는 프레임워크를 제공해 준다.

Goos 외 2인(2011)도 수리 소양을 수학적 지식, 도구, 성향의 세 가지 요소로 선정하고 이 세 가지에 맥락이 적용될 수 있는 모형을 제시하였다. 이 모형은 수학 교육 측면에서 수리 소양을 보다 정교하게 설정한 것을 볼 수 있는데, 수학적 지식에서는 문제해결, 어림, 개념, 기능을, 도구에서는 표현, 신체적, 디지털의 측면을, 성향에서는 자신감, 융통성, 진취성, 위험성의 측면을 다룬다. 이에 따르면 수리 소양은 문제 상황의 맥락 속에서 수학적 지식을 여러 도구적 측면으로 활용하는 성향이라고 볼 수 있다.

수리 소양을 구성하는 요소는 국가별, 연구자 별로 다양하게 이루어졌다. 먼저, 국내에서는 김선희와 이승미(2020)는 학년군별로 수리 소양의 요소를 지식, 기능, 태도로 구별하였다([표 1-24]). 지식은 수, 공간, 자료, 규칙과 관계로 나뉘고, 기능과 태도는 다른 하위요소로 나뉘지 않았다.



[표 1-24] 학년군별 수리 소양의 지식, 기능, 태도 요소

		1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
지식	수	[수지1-1] 네 자리 이하의 수 개념 [수지1-2] 두 자리 수의 범위에서 덧셈과 뺄셈 [수지1-3] 한 자리 수의 곱셈 [수지1-4] 분 단위의 시각과 시간 계산 [수지1-5] 길이의 표준 단위와 어림	[수지2-1] 자연수와 소수의 계열 [수지2-2] 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 [수지2-3] 곱하는 수가 한 자리 수 또는 두 자리 수 인 곱셈 [수지2-4] 나누는 수가 두 자리 수인 나눗셈 [수지2-5] 나눗셈 결과의 어림 [수지2-6] 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 [수지2-7] 소수 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 [수지2-8] 초 단위의 시각, 길이, 들이, 무게, 각도의 표준 단위와 어림 [수지2-9] 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합	[수지3-1] 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 혼합 계산 [수지3-2] 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈 [수지3-3] 소수의 곱셈과 나눗셈의 계산 [수지3-4] 분수와 소수의 관계 [수지3-5] 어림값을 나타내는 방법 [수지3-6] 평면도형의 둘레의 길이와 넓이 [수지3-7] 입체도형의 겹넓이와 부피
	공간	[수지1-6] 삼각형, 사각형, 원의 등의 모양 [수지1-7] 여러 가지 입체도형의 모양	[수지2-10] 기본적인 평면도형의 간단한 변환 [수지2-11] 여러 가지 모양의 삼각형과 사각형의 분류	[수지3-8] 도형의 합동과 대칭 [수지3-9] 직육면체, 정육면체, 각기둥, 각뿔, 원기둥, 원뿔, 구와 같은 입체도형의 성질
		[수지1-8] 기준에 따른 자료 분류 [수지1-9] 표나 그래프로 나타내기	[수지2-12] 자료를 수집, 분류, 정리하여 자료의 특성에 맞는 그래프로 나타내기	[수지3-10] 여러 가지 현상을 체계적으로 수량화하거나 그래프로 정리하고 해석하기
	규칙과 관계	[수지1-10] 규칙을 찾고 여러 가지 방법으로 나타내기	[수지2-13] 규칙을 그림이나 식으로 나타내기	[수지3-11] 비와 비율(백분율) [수지3-12] 비례식
기능	기능	[수기1-1] 자연수의 간단한 계산을 할 수 있다. [수기1-2] 자료를 정리하여 표나 그림으로 나타낼 수 있다.	[수기2-1] 간단한 실생활 문제를 수학적으로 해결할 수 있다. [수기2-2] 논리적 추론 과정이 올바른지 점검할 수 있다. [수기2-3] 수식, 그래프, 도형 등의 표현을 활용할 수 있다.	[수기3-1] 복잡한 문제를 수학적으로 해결할 수 있다. [수기3-2] 표, 식, 그래프 등의 여러 가지 표현을 다른 표현으로 바꾸어 나타낼 수 있다. [수기3-3] 공학적 도구를 활용하여 수학적 사실을 탐구할 수 있다.
	태도	[수태1-1] 상황을 식이나 그래프 등으로 표현하는 것에 관심을 가진다. [수태1-2] 물건 구매 등의 상황에서 수학을 이용하려는 시도를 한다.	[수태2-1] 실생활 문제에서 수학을 활용하려는 데 자신감을 갖는다. [수태2-2] 교과 학습을 위해 수학이 필요함을 인식한다.	[수태3-1] 합리적인 근거를 들어 논리적으로 설명하려 한다. [수태3-2] 결론이나 과정이 옳은지 확인하려 한다. [수태3-3] 수학하는 즐거움을 느낀다.

호주(National Curriculum Board, 2009)에서는 일반 역량 중 하나로 수리 소양을 교육과정에서 강조하고 있으며 수학이 필요한 상황뿐만 아니라 다른 교과를 통해서 기를 것을 강조하고 있다. 여섯 가지 핵심 아이디어로 수로 어렵하고 계산하기, 패턴과 관계를 인식하고 사용하기, 분수, 소수, 백분율, 비와 비율의 사용, 공간 추론의 사용, 통계 정보 해석하기, 측정의 사용하기이며 각각의 의미는 [표 1-25]와 같다.



[표 1-25] 호주의 수리 소양의 핵심 아이디어

핵심 아이디어	의미
수로 어렵하고 계산하기	학생들은 효율적이고 정신적인, 그리고 지필 또는 디지털 전략을 사용하여 다양한 실제 상황에서 일상의 문제를 풀고 모델링하기 위해 수를 사용하여 어렵하고 계산하는 기술을 적용한다. 학생들은 돈이 사용되는 상황을 확인하고, 돈의 가치에 대한 지식을 구매, 예산 편성 및 돈 사용의 정당화에 적용한다.
패턴과 관계를 인식하고 사용하기	학생들이 추세를 파악하고 패턴을 지속하고 예측하기 위해 다양한 규칙과 관계를 기술하고 사용하는 것을 포함한다. 학생들은 진정한 맥락에서 문제를 해결할 때 패턴과 관계에 대한 이해를 적용한다.
분수, 소수, 백분율, 비와 비율의 사용	분수와 소수의 의미, 백분율 표현, 비와 비율, 그리고 이것들을 실제 상황에서 어떻게 적용할 수 있는지에 대한 이해를 포함한다. 학생들은 실제 상황에서 문제를 해결하기 위해 비와 비율, 비례와 백분율을 사용하여 모양과 대상을 시각화하거나, 순서를 매기거나, 기술한다.
공간 추론의 사용	학생들이 주변 공간을 이해하는 것을 포함한다. 학생들은 모양과 대상을 시각화하고 식별하고 정렬하여 그것들의 주요 기능을 설명한다. 대칭, 모양 및 각도를 사용하여 실제 상황에서 문제를 해결하고, 지도와 다이어그램을 해석하고 척도와 방향 언어를 사용하여 경로와 위치를 식별하고 설명한다.
통계 정보 해석하기	학생들이 통계 정보가 표현되는 방식에 익숙해지도록 하는 것을 포함한다. 학생들은 다양한 유형의 데이터 표현의 효율성을 자료의 수집, 기록, 표현, 비교 및 평가하는 것과 관련된 진정한 맥락에서 문제를 해결한다. 또 우연 사건의 결과를 설명할 때 적절한 언어와 수치 표현을 사용한다.
측정의 사용	학생들이 길이, 넓이, 부피, 둘레, 시간 및 무게 측정에 대해 학습하는 것을 포함한다. 학생들은 실제 상황에서 문제를 해결할 때 측정 단위를 사용하여 어렵, 측정, 비교, 계산한다. 또한 학생들은 시계를 읽고 시간을 변환하고, 달력을 사용하여 날짜와 이벤트를 식별하고 순서를 지정하며 다양한 목적으로 시간표를 사용한다.

## 라. 디지털 소양

급변하는 정보통신 기술의 발전에 따라 교육에서 학생에게 강조되어야 할 능력들도 달라지고 있다. 이에 따라 국내외에서는 디지털 소양을 기존의 읽기, 쓰기, 셈하기와 같은 수준으로 강조되어야 한다는 의견이 부각되고 있다. Gilster(1997)는 단순히 컴퓨터를 사용하는 능력에서 더 나아가 다양한 출처에서 얻은 정보를 이해하고, 이를 올바르게 평가할 수 있는 비판적인 사고력을 기반으로 획득한 정보를 자신의 목적에 맞게 새로운 방식으로 조합하여 활용하는 능력을 나타내기 위해 디지털 소양이라는 용어를 처음 도입하였다. 다양한 연구자들에 의해 디지털 소양의 개념은 확장되어 현재는 디지털 기술 활용을 위한 인식과 태도까지 포함한 의미로도 사용이 된다(이운지 외 2인, 2019). 디지털 소양은 2022 개정 교육과정에서 “디지털 지식과 기술에 대한 이해와 윤리의식을 바탕으로, 정보를 수집·분석하고 비판적으로 이해·평가하여 새로운 정보와 지식을 생산·활용하는 능력”을 의미한다(교육부, 2022a).

디지털 소양의 구성은 디지털 테크놀로지 이해와 활용, 디지털 의식·태도, 디지털 사고 능력, 디지털 실천 역량 4개의 내용 영역을 포함한다(이운지 외 2인, 2019). 각 내용영역에 대한 일반화된 지식과 내용 요소는 [표 1-26]과 같다.

[표 1-26] 디지털 소양의 구성 요소

내용영역	일반화된 지식	내용 요소	
디지털 테크놀로지 이해와 활용	디지털 소양은 디지털 기기의 원리를 이해하고, 다양한 소프트웨어를 활용하여 정보를 관리하는 능력을 포함한다.	컴퓨팅 시스템	컴퓨터, 모바일기기, 웨어러블 기기 등 하드웨어 작동 원리 이해
		소프트웨어 활용	다양한 기기에서의 운영체제와 응용 소프트웨어 활용 기술
		인터넷과 네트워크	인터넷 활용 기술 및 빅데이터, 사물인터넷, 클라우드 컴퓨팅의 원리 이해
		정보관리	정보를 수집하고 가공하여 보존 및 전달하는 기술
		코딩	컴퓨터 언어의 이해 및 기본적 활용을 통한 아이디어 표현 능력
디지털 의식-태도	디지털 소양은 사회의 공익을 추구하고 개인의 삶을 보호하기 위하여 안전하게 기술과 정보를 사용하는 데 필요한 규범과 윤리를 배우고 예절과 태도를 형성해야 한다.	최신 기술 이슈	가상현실, 인공지능, 로봇(센서), 3D프린터 등 최신 기술 동향
		생명 존중 의식	디지털 환경에서의 생명의 존엄성 및 인간의 다양성에 대한 이해
		디지털 준법정신	네트워크 보안, 디지털 지적 재산권 보호, 개인정보보호 등 디지털 사회규범 준수
디지털 사고 능력	디지털 소양은 디지털 사회에서 요구하는 지식, 기술, 태도를 통합적으로 학습하고 수행하기 위한 고차원적 사고력을 필요로 한다.	디지털 예절	사이버폭력 예방 등 온·오프라인 환경에서의 디지털기기 사용 예절
		비판적 사고력	수집한 정보를 이해·분석, 추론·논증, 종합·평가할 수 있는 사고
		컴퓨팅 사고력	추상화와 자동화를 이용하여 아이디어를 표현하고, 문제를 해결하는 사고
디지털 실천 역량	디지털 소양은 소통과 협업의 과정을 거쳐 디지털 사회의 문제를 해결하고 새로운 콘텐츠를 창작해 낼 수 있는 실천적 역량이다.	창의적 사고력	다른 관점에서 현상을 바라보고, 다양한 아이디어를 생각하고, 서로 다른 지식과 기술 영역을 융합하는 사고
		의사소통과 협업	디지털 환경에서의 상호작용, 토의·토론, 협력적 과제 수행 능력
		문제해결	디지털 기술을 활용하여 문제를 분석하고 대안을 고안하는 능력
		콘텐츠 창작	프리젠테이션(PPT)(표현), 디자인(설계), 코딩 기술을 활용한 새로운 정보·미디어를 생성하는 능력

디지털 기초 소양을 함양하기 위해 2022 개정 수학과 교육과정에서는 모든 내용 영역에서 교수 학습에 효과적인 공학 도구를 활용할 것을 다음과 같이 제안하고 있다.

- 계산 기능을 숙달하는 것이 목적이 아닌 경우에는 계산기를 사용하게 할 수 있다.
- 소수의 곱셈과 나눗셈에서 복잡한 계산은 계산기를 사용하게 할 수 있다.
- 계산식의 배열에서 계산 결과의 규칙을 찾을 때 필요에 따라 계산기를 사용하게 할 수 있다.
- 선대칭도형과 점대칭도형 그리기를 평가할 때 모눈종이, 점판, 공학 도구 등을 사용하여 쉽게 그릴 수 있게 한다.
- 입체도형의 구성 요소와 성질, 전개도, 쌓기나무로 만든 입체도형을 탐구할 때는 여러 가지 모형과 공학 도구를 사용하게 할 수 있다.
- 막대그래프와 꺾은선그래프, 띠그래프와 원그래프를 그릴 때 공학 도구를 사용하게 할 수 있다.
- 복잡한 자료의 평균이나 백분율을 구할 때 계산기를 사용하게 할 수 있다.

## ① 초등학교 수학 교과의 교수·학습

### 1 수학 교수·학습의 필요성

학생들에게 수학을 가르치다 보면 종종 “선생님, 이것(특정 수학 내용)을 왜 배워요?” 또는 보다 일반적으로 “수학을 왜 배워야 해요?”라는 질문을 듣게 된다. 특히 실생활에서 별로 활용하지 않는 수학 내용을 가르칠 때 학생들로부터 이와 같은 질문을 들으면 교사가 막상 어떻게 대답해야 할지 난감할 때가 있다. 사실 수학은 학교 교육에서 주요 교과 중의 하나로 초등학교 1학년부터 많은 시간을 할당하여 가르치고 배우기 때문에 교사나 학생 모두 수학 교수·학습의 필요성을 생각하지 않고 너무나 당연하게 수학을 가르치고 배워 왔을 수 있다. 이 절에서는 우선 다양한 측면에서 수학 교수·학습의 필요성에 대해 생각해 보고, 이러한 필요성을 초등학교 학생들과 교사들이 어느 정도로 인식하고 있는지에 대한 분석 결과를 살펴본 후 초등학교 학생들과 교사들이 교수·학습의 필요성을 제대로 인식하는 것이 수학 교수·학습 과정에서 왜 중요한지 알아보고자 한다.

#### 가. 수학 교수·학습의 필요성

수학 교수·학습의 필요성을 다양한 측면에서 생각해 볼 수 있다. 넓게 보면 수학 교과도 공통 교육과정의 지향점을 추구하는 교과 중의 하나라는 측면에서 2022 개정 교육과정에서 추구하는 ‘포용성과 창의성을 갖춘 주도적인 사람’을 만들기 위해 필요한 교과라고 볼 수 있다(교육부, 2022). 그러나 수학 교과의 고유한 특성을 바탕으로 수학 교수·학습의 필요성을 생각해 본다면 대개 ‘수학의 가치’(교육부, 2022) 또는 ‘수학의 교육적 가치’(강완 외 5인, 2022) 등으로 대체될 수 있으며, 그러한 가치는 여러 교과 중에서 ‘왜 수학을 가르치고 배우는가?’에 대한 이유와 직접적으로 관련된다. 수학 교수·학습의 필요성을 몇 가지로 정리하느냐는 문헌에 따라 차이가 있으나 여기서는 되도록 세분하여 정리하였다. 그 과정에서 일부 필요성은 그 경계가 모호하여 명확히 구분되지 않을 수도 있고 겹칠 수도 있다. 그럼에도 불구하고 초등학교 교사들에게 수학 교수·학습의 필요성을 다양한 관점에서 생각해 볼 수 있는 기회를 제공하기 위해 강조점을 달리하여 수학을 가르치고 배우는 이유를 정리하고자 한다.

첫째, 수학은 실용적이기 때문에 가르치고 배울 필요가 있다(교육부, 2022; 강완 외 5인, 2022; Heymann, H. W., 2003). 생활 속 현상이나 사회 및 자연 현상을 이해하고 여러 가지 상황을 판단하거나 다양한 맥락의 문제를 해결하는 데 수학이 활용된다. 전통적으로 강조되어 온 사칙계산과 같은 기초적인 기능뿐만 아니라 경제, 금융, 정보 통신, 공학 등 다양한 분야에서 수학은 실용적이다. 특히 최근에 빅데이터(big data)를 바탕으로 한 통계나 인공지능(Artificial Intelligence)의 활용 범위가 더 넓어짐에 따라 수학의 실용적 가치가 더욱 강조된다.

둘째, 수학은 미래를 위한 준비에 필요하기 때문에 가르치고 배울 필요가 있다(교육부, 2022; Heymann, H. W., 2003). 초등학생의 입장에서 가까운 미래로는 중학교와 고등학교 수학 학습의 토대를 쌓기 위해, 그다음에는 대학 진학, 직업 교육 또는 직장 생활에서 필요로 하는 수학 또는 수학적 사고를 신장하기 위해 필요하다. 최근에는 기본적인 수리 소양뿐만 아니라 수준 높은

수학적 지식과 창의적 사고를 필요로 하는 분야가 점점 많아지기 때문에 미래 사회의 구성원이 되기 위한 준비로써의 수학 교육이 강조된다.

셋째, 수학은 다른 교과를 배우거나 학문을 연구하는 데 도구로써 필요하기 때문에 가르치고 배울 필요가 있다(교육부, 2022). 학교 수학에서 다루는 내용 중 생활 속 현상, 사회 및 자연 현상, 미래의 직업 등과 직접적인 관련이 없더라도 다른 교과나 학문을 연구하는 데 도구가 되는 경우가 있다. 전통적으로 수학의 필요성은 자연 과학 및 공학 분야에서 강조되었으나 최근에는 사회 과학, 국방, 의학, 예술 및 체육 등 다양한 분야에서 수학의 도구적 가치가 강조되고 있다.

넷째, 수학은 세계를 이해하는 데 필요하기 때문에 가르치고 배울 필요가 있다(Heymann, H. W., 2003). 사실 수학은 고정불변하는 것이 아니라 여러 시대를 거쳐 발전되어 왔다. 이러한 수학의 발달 과정을 통해 인류는 세계에 대한 이해를 넓힐 수 있었으며, 나아가 자연 세계와 인공 세계를 과학적으로 설명할 수 있었다.

다섯째, 수학은 그 자체가 학문적으로 가치가 있기 때문에 가르치고 배울 필요가 있다(교육부, 2022; 강완 외 5인, 2022). 수학은 인류 문명 발전 및 문화의 발달과 더불어 사람들의 노력을 바탕으로 발전되어 온 소중한 가치 있는 지적 성취물 또는 정신문화의 정수라는 측면에서 이 학문적 유산을 후대에도 계승하고 발전시켜야 한다. 수학을 가르치고 배우는 것은 문화적 일관성 및 정체성을 유지하는 도구가 된다(Heymann, H. W., 2003).

여섯째, 수학은 합리적이고 논리적인 사고를 발달하게 하므로 가르치고 배울 필요가 있다(교육부, 2022; 강완 외 5인, 2022). 수학은 도야적 가치를 지니고 있기 때문에 다양한 사고 능력을 신장시킬 수 있는데, 그중 합리적이고 논리적인 사고를 우선적으로 생각해 볼 수 있다. 이와 같은 사고는 사회생활을 영위하는 데 핵심적인 사고로 학생들이 선택한 진로에 상관없이 기본적인 삶을 영위하는 데도 필요하다. 수학을 ‘생각하는 방법’으로 본다면, 합리적이고 논리적인 사고의 발달은 수학을 가르치고 배우는 강력한 이유일 수 있다.

일곱째, 수학은 사회성 및 의사소통 능력을 향상하게 하므로 가르치고 배울 필요가 있다(교육부, 2022; Heymann, H. W., 2003). 2022 개정 수학과 교육과정에서는 ‘협력하여 문제를 해결하고 성찰하는 경험을 통해 다른 사람에 대한 포용성을 갖춘 민주 시민’으로 성장할 수 있음을 기술하고 있다. 또한 수학은 특정한 용어와 기호를 사용하는 언어로, 이러한 언어를 활용하여 학생들은 같은 문화권뿐만 아니라 다른 문화권을 포함하여 다양한 사람들과 의사소통할 수 있다. 이 과정에서 학생들은 책임감, 협동심 등의 사회성을 기를 수 있으며 민주적 소통 능력을 향상할 수 있다(Heymann, H. W., 2003).

마지막으로, 수학은 규칙과 구조를 포함한 아름다움을 가지고 있기 때문에 가르치고 배울 필요가 있다. 수학의 심미적 가치는 다소 주관적일 수 있으나 수학에서 독특하게 나타나는 규칙성이나 내적 일관성 또는 구조 자체를 아름답게 느낄 수 있다. 또한 복잡한 생활 속 현상이나 사회 및 자연 현상을 간결하면서도 일반화·추상화된 수학적 아이디어로 표현하는 과정을 통해 수학의 아름다움을 느낄 수도 있다.

## 나. 수학 교수·학습의 필요성에 대한 초등학교 학생과 교사의 인식

앞에서 제시한 8가지 수학 교수·학습의 필요성과 관련하여 초등학교 학생들이 어떤 필요성을 어느 정도로 인식하고 있는지 알아보기 위해 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 설문지를 활용하여 7점 척도로 조사하였다. 여기서 1점에 가까울수록 강한 긍정을 나타내고 7점에 가까울수록 강한 부정을 나타내기 때문에 평균이 4점보다 낮으면 긍정적인 답변이 더 많은 것으로 판단할 수 있다.



초등학교 6학년 학생들의 경우 [표 2-1]에 제시한 바와 같이 실용성, 학문적 가치, 미래를 위한 준비, 합리적·논리적 사고 발달, 도구 교과의 순으로 긍정적인 반응이 많았다. 예를 들어 실용성에 관한 질문 중에서는 ‘일상생활에서 계산하는 일이 많아서 수학을 배운다.’라고 생각하는 학생들이 많았고, 학문적 가치와 관련해서는 ‘수학은 계속 연구하고 발전해야 하므로 후손들에게 계속 가르쳐야 할 학문이다.’라고 생각하는 학생들이 많았다. 또한 미래를 위한 준비와 관련해서는 ‘중학교와 고등학교 진학을 위해 수학을 배운다.’라고 생각하는 학생들이 많았고, 합리적이고 논리적인 사고 발달과 관련해서는 ‘수학을 배우면 일상생활에서 어떤 문제를 해결할 때 현명하게 해결할 수 있는 생각과 행동을 기르는 데 도움이 된다.’라고 생각하는 학생들이 많았다. 마지막으로 도구 교과와 관련해서는 ‘수학을 배우면 다른 교과를 쉽게 이해할 수 있다.’라고 생각하는 학생들이 많았다. 그러나 이러한 5개의 수학 교수·학습의 필요성별 평균을 보면 3.19(실용성)부터 3.77(도구 교과)까지 나타났기 때문에 전반적으로 ‘약한 긍정’ 정도에 해당한다. 다시 말해 초등학교 6학년 학생들은 수학 교수·학습의 필요성에 대해 그다지 높게 인식하고 있지는 못하다.

[표 2-1] 수학 교수·학습의 필요성에 대한 초등학교 학생과 교사의 인식

수학 교수·학습의 필요성	실용성	미래를 위한 준비	도구 교과	세계에 대한 이해	학문적 가치	합리적·논리적 사고 발달	사회성 및 의사소통 능력 향상	심미성
학생	3.19	3.53	3.77	4.27	3.47	3.72	4.33	4.35
교사	2.25	2.51	2.33	3.42	2.31	2.19	3.52	3.42

한편 초등학교 교사들이 수학 교수·학습의 필요성을 어떻게 인식하고 있는지 조사한 연구에서는 우선 초등학교에서 가르치는 여러 교과 중에서 수학 과목이 상대적으로 얼마나 중요하다고 생각하는지 조사하였는데 약 70 %의 교사들이 수학 교과의 중요도를 1위나 2위로 생각하는 것으로 드러났다. 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 조사한 것과 동일한 8가지 수학 교수·학습의 필요성과 관련한 7점 척도의 조사에서는 [표 2-1]에 제시한 바와 같이 합리적·논리적 사고 발달, 실용성, 학문적 가치, 도구 교과, 미래를 위한 준비로 수학을 인식하는 비중이 높게 나타났다. 주목할 만한 것은 이러한 5개의 필요성에 대해 7점 척도 중 평균이 2.19(합리적·논리적 사고 발달)부터 2.51(미래를 위한 준비)까지 나타나 학생들의 인식과는 달리 전반적으로 ‘긍정’ 정도에 해당한다는 것이다. 나머지 3개의 필요성, 즉 세계에 대한 이해, 심미성, 사회성 및 의사소통 능력 향상과 관련해서도 평균 3.42와 3.52로 각각 나타나 ‘약한 긍정’ 정도에 해당한다고 볼 수 있다.

전반적으로 수학 교수·학습의 다양한 필요성에 대해 학생보다 교사가 더 긍정적으로 인식하고 있는 것은 고무적인 현상이다. 왜냐하면 초등학교의 특성상 교사의 인식은 학생들에게 직·간접적으로 많은 영향을 끼칠 수 있기 때문이다. 실제로, 초등학교 5학년 학생들은 수학 수업에 전문성을 가진 교사와 한 단원의 수업을 통해서도 그 교사가 수학 수업에서 무엇을 중요하게 생각하는지 파악할 수 있었고, 교사와의 수업 전과 후에 수학 학습 가치 측면에서 긍정적인 변화가 있었다. 물론 초등학교 학생들이 교사의 수학 교수·학습에 대한 가치를 그대로 수용하기보다는 다양한 방식으로 해석하기도 하고 필요에 따라 유지하거나 수정하는 경향도 보이기는 했으나 중요한 것은 교사가 생각하는 수학 교수·학습의 가치가 수학 수업을 통하여 초등학교 학생들에게 영향을 줄 수 있다는 점이다.

또한, 수학 교수·학습의 필요성에 대해 초등학교 학생들은 실용성을 가장 높게 인식하고 있는 반면에 초등학교 교사들은 합리적·논리적 사고 발달을 가장 높게 인식하고 있다는 것이 중요하다.

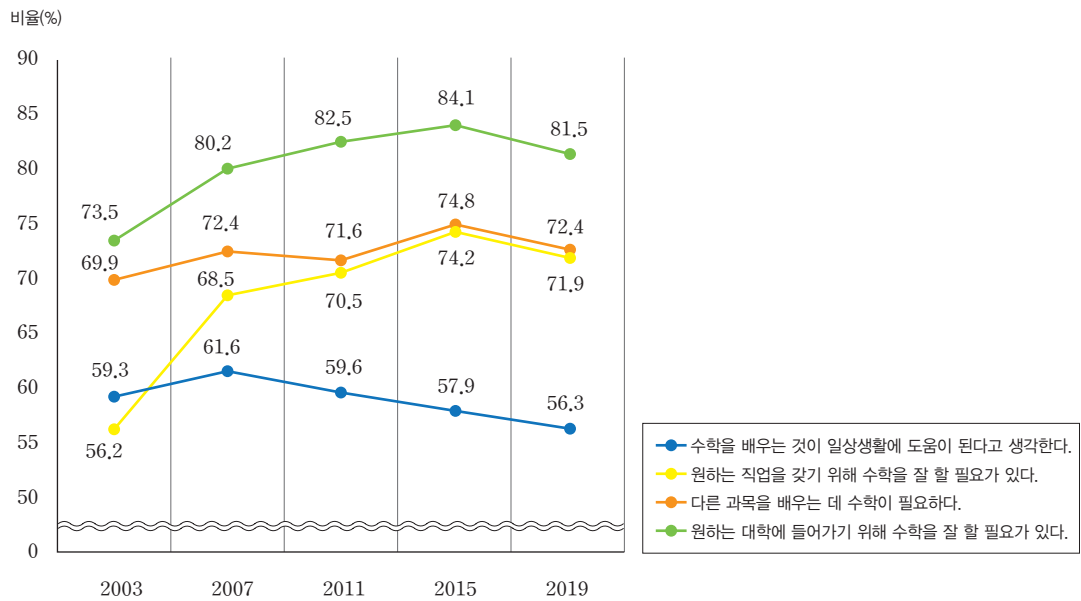
다. 왜냐하면 학생들은 수학 시간에 배운 내용이 생활 속 현상이나 일상생활에서 직접적으로 활용되어 실용적일 때는 수학 학습의 필요성을 쉽게 인식하지만 직접적으로 적용되지 않거나 일상생활에서 접근하기 어려운 내용의 경우는 왜 배우는지 이해하지 못할 경우가 많기 때문이다. 이와 같은 내용은 초등학교 고학년이 되거나 중등학교에 진학하게 되면 수학을 일상생활과 괴리된 교과로 받아들일 수밖에 없는 배경이 되기도 한다. 따라서 수학 교육의 여러 필요성 중에 특정한 필요성만을 강조할 수는 없겠지만 실용성처럼 수학 교과의 기능적인 측면만을 부각하기보다는 수학 교과 고유의 가치라고 볼 수 있는 합리적·논리적 사고 발달과 관련하여 학생들에게 수학을 공부하는 이유를 설명하는 것이 필요해 보인다. 이와 같은 측면에서 초등학교 수학 수업에서 교사들은 적극적으로 수학 교수·학습의 필요성에 대해 학생들이 생각해 보거나 경험할 수 있는 기회를 제공하여야 하고, 이때 수학 교과를 통한 합리적·논리적 사고 발달의 측면을 강조할 필요가 있다(교육부, 2022).

#### 다. 수학 교수·학습의 필요성 인식과 수학 성취도

우리가 어떤 일을 할 때 그 일의 필요성이나 가치를 정확히 인지하고 있다면 그 일을 결코 소홀히 하지 않을 뿐만 아니라 잘하려고 부단히 노력할 것이다. 학생들 역시 수학을 공부할 때 수학을 왜 배우는지 알고 공부한다면 훨씬 열심히 공부할 가능성이 높고 이는 다시 수학 학업 성취도와 연결될 수 있다. 예를 들어 초등학교 6학년 학생들의 수학적 성취 수준에 따라 수학 교수·학습의 필요성을 인식하는 정도에서 차이가 있음을 밝힌 연구에서 전반적으로 성취 수준이 높은 학생들이 수학 교수·학습의 다양한 필요성과 관련하여 긍정적으로 답변한 것과 대조적으로 성취 수준이 낮은 학생들은 긍정적인 답변이 적었다. 예외적인 것은 실용성과 관련하여 성취 수준이 중이나 하인 학생들이 성취 수준이 상인 학생들보다 더 긍정적인 답변을 한 것이었다. 다시 말해 성취 수준이 중이나 하인 학생들이 가장 많이 인식하는 수학 교수·학습의 필요성은 실용성이었다. 반면에, 성취 수준이 상인 학생들이 가장 많이 인식하는 필요성은 학문적 가치와 미래를 위한 준비였다. 이와 같은 결과를 감안하면 학교 수학에서 다루는 내용이 학생들이 인식할 수 있는 실용적 가치의 범위에 속하지 않는다면 성취 수준이 중이나 하인 학생들은 수학 교수·학습의 필요성을 제대로 인식하지 못하고 공부할 가능성이 높다.

수학 교수·학습의 필요성 인식과 학생들의 수학 성취도 간의 관계는 수학·과학 성취도 추이 변화 국제 비교 연구인 TIMSS(Trends in International Mathematics and Science Study)에서 일관되게 드러났다(상경아 외 6인, 2020). 수학에 대한 가치 인식 조사는 중학교 2학년을 대상으로 하며 문항 내용은 외재적 동기와 관련된 9문항으로 구성되어 있다(상경아 외 6인, 2020; Mullis, I. V. S. 외 4인, 2020). TIMSS 2019 자료를 살펴보면 ‘수학을 배우는 것이 일상생활에 도움이 된다고 생각한다.’ 문항에 긍정 응답 비율이 56.3%, ‘원하는 직업을 갖기 위해 수학을 잘 할 필요가 있다.’ 문항에 긍정 응답 비율이 71.9%, ‘다른 과목을 배우는 데 수학이 필요하다.’는 문항에 긍정 응답 비율이 72.4%, ‘원하는 대학에 들어가기 위해 수학을 잘 할 필요가 있다.’ 문항에 긍정 응답 비율이 81.5%로 나타났다(상경아 외 6인, 2020). 즉, 수학의 실용적 가치에 대한 인식보다 도구적 가치에 대한 인식이 높고 무엇보다 미래를 위한 준비, 특히 원하는 대학에 들어가기 위해 수학을 잘 할 필요가 있다는 인식이 가장 높은 것을 알 수 있다. 이러한 경향은 TIMSS 2007부터 일관되게 드러난 결과였는데 TIMSS 2019 결과에서는 이러한 외재적 동기에 대한 긍정 응답 비율이 TIMSS 2015 결과와 비교해 볼 때 조금 감소하는 경향을 보였다([그림 2-1] 참조).





[그림 2-1] 중학교 2학년 학생들의 수학에 대한 가치 인식 하위 문항별 긍정 응답 비율 추이 (상경아 외 6인, 2020)

한편 우리나라 학생들의 수학에 대한 가치 인식을 국제 평균과 비교해 보면 다음과 같다. 수학에 대해 ‘매우 가치 있음’ 또는 ‘가치 있음’으로 응답한 우리나라 중학교 2학년 학생들의 비율이 각각 14 %와 56 %였으나 국제 평균은 각각 37 %와 47 %였고, ‘가치 없음’으로 응답한 우리나라 중학교 2학년 학생들의 비율은 30 %였으나 국제 평균은 16 %로 드러났다(상경아 외 6인, 2020). 즉, 우리나라 학생들의 수학에 대한 가치 인식 정도는 국제적으로 매우 낮은 수준으로 일본, 중국과 함께 최하위 수준에 머물고 있었으며, 특히 수학을 매우 가치 있게 인식하고 있는 학생들의 비율이 낮았다(Mullis, I. V. S. 외 4인, 2020). 또한 이전 주기와 비교해서도 수학에 대한 가치 인식이 조금 더 낮아진 것으로 드러났다(서민희 외 4인, 2021).

수학에 대한 가치 인식과 학생들의 수학 성취도와와의 관련성을 살펴보면 수학이 가치 있다고 인식할수록 수학 성취도가 높다는 것을 알 수 있는데 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 수학에 대해 ‘매우 가치 있음’으로 응답한 학생들의 수학 성취도는 평균 668점, ‘가치 있음’으로 응답한 학생들의 수학 성취도는 평균 620점, ‘가치 없음’으로 응답한 학생들의 수학 성취도는 평균 554점으로 가치 인식에 대한 학생 집단별 성취도 차이가 매우 크다는 것을 알 수 있다(상경아 외 6인, 2020). 이러한 경향은 수학에 대한 가치 인식별 학생들의 수학 성취도 국제 평균이 각각 507점, 487점, 462점이라는 것을 감안해 볼 때 우리나라에서 특히 가치 인식에 따른 집단별 성취도 차이가 크다는 것을 알 수 있다.

이와 같은 연구 결과를 종합해 볼 때 결국 학생들이 수학 교수·학습의 필요성, 다시 말해 수학의 가치를 명확하게 인식할 수 있도록 교사가 적극적으로 도와줄 필요가 있다. 또한 초등학교 학생들이 가장 긍정적으로 인식한 수학의 실용적 가치 이외에 다양한 가치를 인식할 수 있도록 다변화할 필요가 있다. 수학의 실용적 가치는 중학교 학생들의 인식 조사 결과를 살펴볼 때 계속 낮아지고 있어서(상경아 외 6인, 2020) 학생들이 수학의 실용적 가치만을 증점적으로 인식하고 있다면 상급 학교에 진학한 이후 수학을 왜 배워야 하는지 그 필요성을 인식하기가 더 어려울 수 있다. 이에 초등학교 학생들과 중학교 학생들이 긍정적으로 인식하고 있는 ‘미래를 위한 준비’, ‘도구 교과’ 등을 더욱 부각할 필요가 있고, 궁극적으로는 학생들의 진로나 직업 선택과 관계없이 모든 학생이 민주 시민으로서의 삶을 영위하는 데 도움이 되며 수학 교과 본연의 특징이라고 할 수 있는 ‘합리적·논

리적 사고 발달'을 초등학교에서부터 중요하고 의미 있게 다루며 수학 교수·학습 과정에서 자연스럽게 지속적으로 강조할 필요가 있다.

## 2 수학적 사고의 특성과 방법

효과적인 수학 학습을 위해서는 학생들이 수학적으로 사고하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 습득할 수 있도록 도와야 한다. 이를 위해서는 수학적 사고의 특성을 파악하고 학생들이 수학적 사고를 경험해 볼 수 있는 기회를 제공해야 한다. 수학적 사고는 관점에 따라서 달리 볼 수도 있지만 [그림 2-2]와 같이 정리할 수 있으며 각각의 수학적 사고에 대한 구체적인 지도 방법을 제시하고자 한다(강완 외 5인, 2022; 고은성 외 7인, 2022).

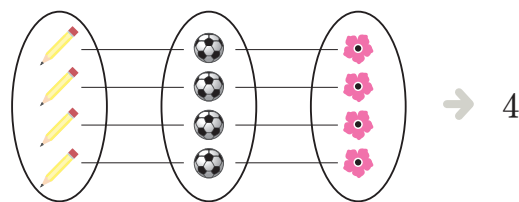


[그림 2-2] 수학적 사고의 종류

### 가. 추상화의 사고

추상화의 사고는 여러 대상을 모아 두고 그들이 가지는 이질적인 속성은 버리고 동질적인 속성은 끄집어내어 사고의 대상으로 삼는 수학적 사고이다. 이는 어떤 구체물의 집합에서 이질적 요소를 제거하고 동질적 요소만을 추출하여 개념을 표상화하는 과정으로서의 사고를 말한다.

예를 들어 집합수 4의 개념은 연필 4개의 집합, 공 4개의 집합, 꽃 4송이의 집합들 각각에 대해서 이들이 가지고 있는 이질적 요소를 제거하고 동질적 요소, 즉 원소의 수가 4라는 성질만을 표상화한 것이라 할 수 있다([그림 2-3] 참조). 직사각형의 경우 공책, 책상, 종이, 칠판들 각각에 대해서 이들이 가지고 있는 이질적 요소를 제거하고 동질적 요소인 모두 네 개의 선분으로 둘러싸여 있고 네 각이 직각이라는 성질을 표상화한 것이다.



[그림 2-3] 추상화의 사고 예시

그러나 초등학교 학생들이 추상화의 사고를 하는 것은 쉬운 일이 아니다. 직사각형의 학습과 같이 여러 가지 물건들을 살펴보고 여기서 이질적인 요소를 제거하는 과정에는 많은 노력이 필요하다. 이러한 어려움 때문에 학생들은 도형을 학습할 때 비슷한 모양 찾기 활동으로 수업 내용을 이해하기도 한다. 이에 학생들이 생활 속 여러 가지 물건들을 관찰해 보고 공통점과 차이점을 분석한 후 이질적인 요소를 제거했을 때 가장 유사하게 나타날 수 있는 형태를 머릿속으로 추상화해 보는 활동이 필요하다. 이때 교사는 학생들이 다양한 측면에서 대상들을 관찰하고 관찰한 내용을 토대로 추상화할 수 있도록 충분한 기회를 제공해야 한다.

학생들이 수학 수업 시간에 추상화라는 수학적 사고를 기를 수 있도록 “어떤 점이 같은가?”, “공통점은 무엇인가?”, “어떤 경우의 것으로 봐야 하는가?”, “무엇이 중요한가?”, “말의 뜻을 분명하게 말해 보자.”와 같은 발문을 제시할 수 있다.

#### 나. 형식화의 사고

형식화의 사고는 추상화된 수학적 개념들을 대상으로 공통적인 규칙성이나 필요한 규칙, 원리 등을 만들어 가는 과정으로서의 사고를 말한다. 수학에는 원리와 규칙과 같은 형식이 많이 있으며 더 나은 의사소통을 위하여 좀 더 편리한 틀을 만드는 과정이 필요하다. 수학에서는 알고리즘을 만드는 과정을 형식화의 사고로 볼 수 있다.

예를 들어 두 자리 수의 덧셈을 좀 더 편리하게 하기 위해서는 일의 자리 수는 일의 자리 수끼리 더하고, 십의 자리 수는 십의 자리 수끼리 더하는 과정을 통해 형식화의 사고를 할 수 있다.

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 2 \\
 + 4 \quad 6 \\
 \hline
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 5 \quad 2 \\
 + 4 \quad 6 \\
 \hline
 \quad 8
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 5 \quad 2 \\
 + 4 \quad 6 \\
 \hline
 9 \quad 8
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 5 \quad 2 \\
 + 4 \quad 6 \\
 \hline
 9 \quad 8
 \end{array}$$







[그림 2-4] 형식화의 사고 예시

학생들에게 이미 형식화된 알고리즘을 안내하는 것으로 지도할 수 있으나 학생들의 수학적 사고 능력을 키우기 위해서는 스스로 형식화하는 경험을 제공하는 것이 필요하다. “다각형의 이름을 어떤 기준으로 부를 수 있는가?”, “소수의 사칙계산을 할 때 자릿값의 원리를 바탕으로 연산 방법을 형식화 할 수 있는가?”와 같은 발문을 제시함으로써 학생들에게 형식화의 사고를 촉진시킬 수 있다.

#### 다. 일반화의 사고

일반화의 사고는 추상화된 수학적 개념을 보다 넓은 범위에 적용시키는 과정으로서의 사고이다. 즉, 추상화된 개념이 어디까지 적용되는지를 알아봄으로써 외연을 명확하게 하거나 확장하는 생각을 일반화의 사고라고 한다. 이는 외연을 고정하고 내포를 분명하게 하는 추상화의 사고와 다르다.

예를 들어 삼각형과 사각형을 고찰하여 도형의 이름과 변의 수와의 관계를 파악하고 그 관계를 일반화하여 오각형과 육각형 등 평면도형의 이름을 지을 수 있다.

모양						
변의 수	3	4				
도형의 이름	삼각형	사각형				

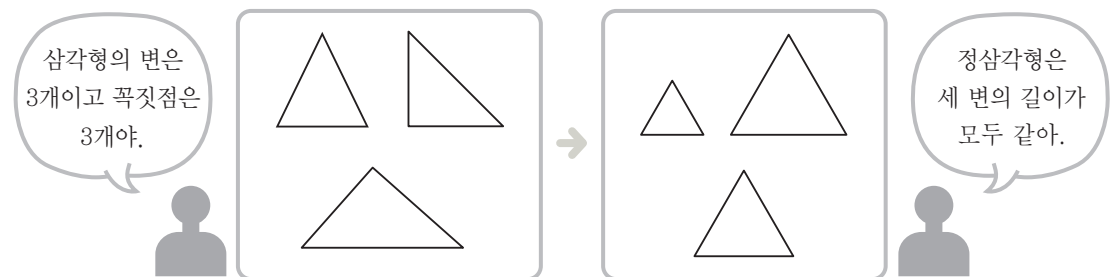
[그림 2-5] 일반화의 사고 예시

이처럼 수학에서 사용되는 여러 가지 개념, 원리 등은 일반화의 사고를 통해 얻어지며 이러한 일반화가 없다면 새로운 개념이나 원리 등이 만들어지기 어렵다. 따라서 학생들이 일반화된 지식을 받아들이도록 지도하는 것보다 스스로 일반화의 사고를 통해 수학적 개념이나 원리를 만들어갈 수 있는 기회를 제공해야 할 것이다. “다른 경우에도 적용될까?”, “범위를 보다 넓히면 어떻게 될까?”, “수를 차례차례 바꾸어 보자.”와 같은 발문을 하는 것이 일반화의 사고를 하는 데 유용하다.

## 라. 특수화의 사고

특수화의 사고는 어떤 사상의 집합에 대한 고찰로부터 문제의 일반성을 잃지 않는 범위에서 문제의 변수를 특수한 수량으로 바꾸거나 극단적인 경우를 생각해 봄으로써 문제를 이해하거나 풀이 방법의 발견을 용이하게 하기 위해 그 집합에 포함되는 보다 작은 집합이나 하나의 사상에 관한 고찰로 이해하는 사고 방법이다.

예를 들어 변과 꼭짓점이 3개인 다양한 삼각형에 대해 고찰한 후 특수한 삼각형인 정삼각형에 대해 고찰할 수 있다.



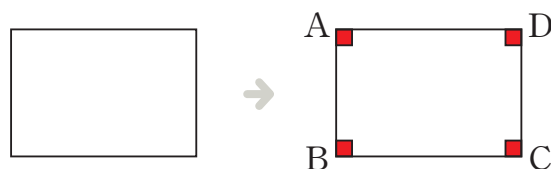
[그림 2-6] 특수화의 사고 예시

이와 같이 문제해결에도 적용할 수 있지만 보통 특수화의 사고는 일반화된 수학적 개념을 특정한 구체적 경우에 적용하는 과정으로서의 사고로 수학적 지식이 적용, 발전되는 과정에 사용할 수 있다. “구체적인 예로는 어떤 것이 있는가?”, “특수한 경우를 생각해 보자.”, “조건을 고정시켜 보자.”와 같은 질문을 통해 특수화의 사고를 증진시키는 데 도움이 될 수 있다.

## 마. 기호화의 사고

기호화의 사고는 사상의 처리를 위하여 대상을 기호로 나타내려는 생각이나 기호로 나타낸 것을 읽어 내려는 생각이다. 문제를 해결하는 과정에서 고려하는 대상을 간결하게 나타내어 그 사상의 처리를 신속, 정확하게 하기 위해 기호화의 사고를 구사하게 된다.

예를 들어 도형과 측정 영역에서 여러 도형을 제시하고 그것들 사이의 관계를 탐구하거나 그 구성 요소 간의 관계를 탐구할 때 그 대상을 기호로 나타냄으로써 사고를 간결하고도 명확하게 진행할 수 있게 된다. “어느 선분과 어느 선분이 서로 수직인가?”, “어느 면과 어느 면이 서로 평행한가?”와 같은 탐구 활동을 할 때 기호가 표시된 도형에서 그 사고 활동을 좀 더 명확하게 진행할 수 있다.



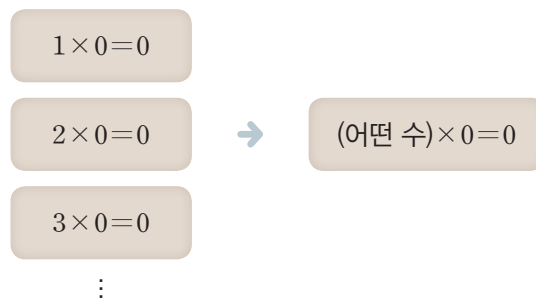
[그림 2-7] 기호화의 사고 예시

“(기호가 붙어 있지 않은 상태에서) 어떤 어려움이 있는가?”, “잘 알아볼 수 있는가?”, “적당한 기호를 붙여 보자.”, “식이 지니고 있는 의미는 무엇인가?”와 같은 발문이 기호화의 사고를 하는 데 유용하다.

### 바. 귀납적 사고

귀납적 사고는 관찰된 개개의 사례를 수집하고 그것들의 공통성을 대상 전체에 성립하는 일반성으로 주장하는 사고이다. 수학의 귀납적 사고는 수학적 대상에 대한 경험을 통하여 어떤 추측이나 예측을 구성하고, 이를 일반적 법칙이나 명제로 발전시키고자 할 때 사용된다.

예를 들어 귀납적 사고는  $1 \times 0 = 0$ ,  $2 \times 0 = 0$ ,  $3 \times 0 = 0$ , ...에서 (어떤 수)  $\times 0 = 0$ 이라는 것을 알아낼 때 사고하는 방법을 의미한다.



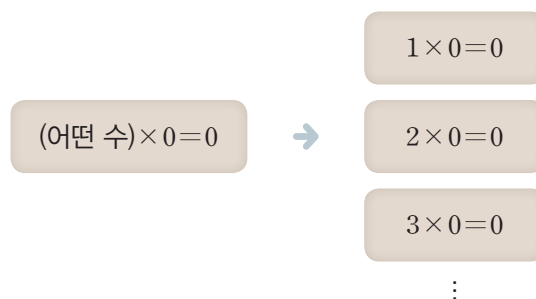
[그림 2-8] 귀납적 사고 예시

귀납적 사고는 주사위에서 마주 보는 면의 눈의 수의 합을 알아보기 위해 전체 집합에 속하는 모든 경우인 3가지 경우를 살펴보고 ‘마주 보는 면의 눈의 수의 합은 7이다.’라고 그 일반성을 설명하는 완전 귀납과 삼각형, 사각형, 오각형의 내각의 크기의 합의 공통성을 기반으로 다각형의 내각의 크기의 합을 추정하는 불완전 귀납으로 나뉜다. 수업에서 교사는 “자료를 모아서 공통점을 알아보자.”, “어떤 규칙이 있을 것 같은가?”, “어떤 추측이 가능한가?”와 같은 발문을 구사하여 학생들의 귀납적 사고를 촉진할 수 있다.

### 사. 연역적 사고

연역적 사고는 일반적인 규칙이나 사실에서 시작하여 보다 구체적인 규칙이나 사실을 이끌어 내는 사고 방법을 의미한다. 귀납적 사고는 어떤 아이디어나 기초적 개념의 형성 과정에 필요하지만 이러한 아이디어나 개념을 검증, 정련하거나 적용하는 과정에는 연역적 사고가 주된 역할을 담당한다. 즉, 새로운 아이디어나 내용의 참, 거짓을 밝히는 것이 연역적 사고이다.

예를 들어 (어떤 수)  $\times 0 = 0$ 이라는 사실에서  $1 \times 0 = 0$ ,  $2 \times 0 = 0$ ,  $3 \times 0 = 0$ 이라는 것을 알아낼 때 사고하는 방법을 말한다.



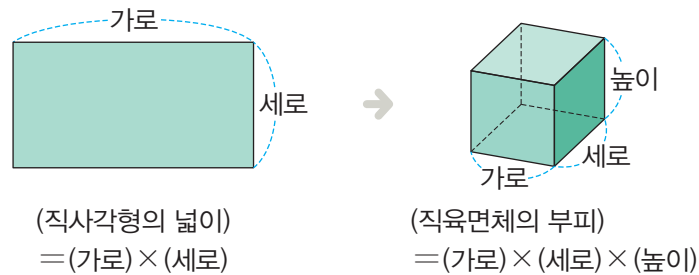
[그림 2-9] 연역적 사고 예시

학생들에게는 “무엇보다 먼저 전제되는 것은 무엇인가?”, “이용할 근거가 되는 명제는 무엇인가?”와 같이 발문을 던질 수 있다. 수학 수업에서는 학생들로 하여금 자신의 행동에 불충분한 점이 있다는 것을 느끼거나 의문을 가지게 하여 연역적으로 생각할 필요성을 느끼게 해야 한다. 이를 통해 학생 자신이 스스로 법칙이나 성질을 발견하게 하면 스스로 발견한 사실에 대해서는 그것이 참이라는 것을 강하게 주장하고 싶게 되고 그것을 위하여 연역적인 생각을 하게 되는 것이다.

### 아. 유추적 사고

유추적 사고는 이미 주어진 성질이나 명제에 기초하여 다른 성질이나 명제를 주어진 것과 유사한 방법으로 추론해 내는 과정에 필요한 사고이다. 유추적 사고는 사고하는 대상 사이의 구조적인 유의점에 착안하여 그에 대해 성립하는 성질이나 법칙 또는 문제해결 방법을 이끌어 내는 발견의 방법으로서의 가치를 가진다.

예를 들어 직사각형의 넓이 구하는 공식을 이해한 학생에게 직육면체의 부피 구하는 공식을 이해 시키려 할 때, 두 수학적 상황의 유사점을 연결하여 ‘직육면체의 부피는 밑면의 넓이에 높이를 곱한다.’는 예상이나 잠정적 결론을 이끌어 내는 사고 방법을 말한다.



[그림 2-10] 유추적 사고 예시

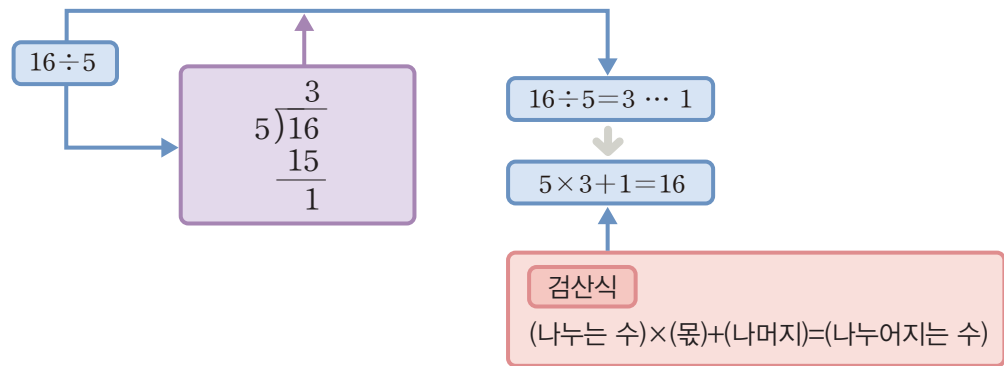
이처럼 이전의 학습한 내용을 이용하여 유사한 문제를 해결할 때 사용한 사고를 유추적 사고라고 한다. 수업 시간에 교사는 “이미 알고 있는 방법과 마찬가지로 할 수 없겠는가?”, “이미 알고 있는 사실과 같아지게 할 수는 없겠는가?”, “이미 알고 있는 문제와 이 문제의 공통점은 무엇인가?”, “그 문제의 해결 결과를 이용할 수는 없겠는가?”, “이 문제와 닮은 문제를 알고 있는가?”와 같은 발문을 구사하여 학생들의 유추적 사고를 촉진시킬 수 있다.

### 자. 가역적 사고

가역적 사고는 사고의 흐름을 앞뒤로 자유롭게 유연하게 전환시키는 즉, 사고 과정을 재구성하는 사고를 의미한다. 수학에서 자신의 계산 과정이 옳은지 확인할 때 가역적 사고를 사용하게 된다.

예를 들어 나눗셈에서 검산을 할 때 가역적 사고가 필요하다.  $16 \div 5 = 3 \cdots 1$ 에서 계산 결과가 맞는지 확인하기 위하여 나누는 수와 몫을 곱해서  $5 \times 3 = 15$ 를 구하고 나머지를 더해서  $15 + 1 = 16$ 을 구하여 16과 나누어지는 수가 같은지를 확인할 수 있다.





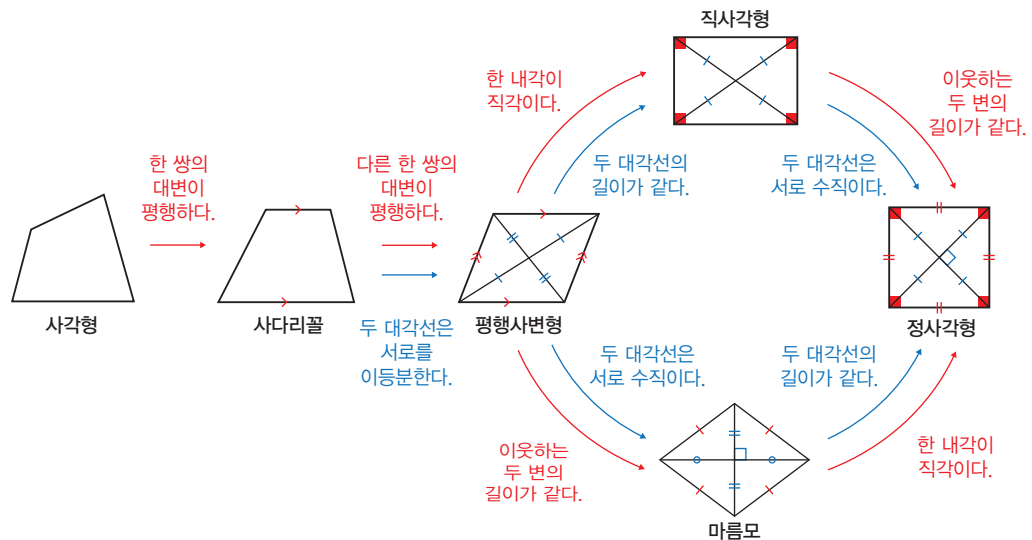
[그림 2-11] 가역적 사고 예시

“조건을 바꾸어서 생각해 보자.”, “다른 관점에서 볼 수 없는가?”, “다른 해결 방법은 없는가?”, “그런 식이 성립하는 구체적인 과정을 만들어 보자.”와 같은 발문을 구사하여 학생들의 가역적 사고를 촉진시킬 수 있다.

#### 차. 통합적 사고

통합적 사고는 많은 사상을 흐트러진 채 두지 않고 보다 넓은 관점에서 그들의 본질적인 공통성을 추상하여 그들을 모두 같은 것으로 볼 수 있게 종합·정리해 나가는 사고이다. 수학 교과는 그 학문의 특성상 여러 내용들이 서로 관련된 계통성을 가지기 때문에 구조적인 유사성에 기초하여 여러 내용을 통합하여 지도하는 것이 가능하고 이를 통해 학습 내용을 관계적으로 이해하도록 도울 수 있다.

예를 들어 내포의 변화 과정을 관찰하여 사각형 상호 간의 포함 관계를 도식화한 장면도 통합적인 사고에 따른 결과이다.



[그림 2-12] 통합적 사고 예시

통합적 사고를 신장시키기 위해서 교사는 “어떤 관점에서 보면 같다고 볼 수 있을까?”, “공통점을 요약·정리하여 나타낼 수는 없을까?”, “알고 있는 것 중에 이것과 같아 보이거나 이것의 특수

한 경우라고 여겨지는 것은 없을까?”와 같은 생각을 하게 해야 한다. 또한 그것을 명확하게 나타내기 위해 요약·정리하여 나타내는 방법을 알아보고 해결 방안을 표현하도록 격려해야 한다.

### 3 좋은 수학 수업을 위한 안내

#### 가. 좋은 수학 수업

수학 교사라면 누구나 좋은 수학 수업을 실행하기를 원할 것이다. 그러나 무엇을 어떻게 가르치고 배우는 수업이 좋은 수학 수업인가의 이슈는 간단하지 않다. 왜냐하면 좋은 수학 수업에 대한 준거는 시대적 흐름, 사회 문화적 맥락, 수학 교육의 연구 동향 등에 따라 강조점이 달라지기 때문이다. 예를 들어 전통적으로 수학 수업에서는 핵심적인 수학 내용을 효과적으로 잘 전달하는 것이 중요했고, 이후 문제해결력, 수학적 사고와 추론 능력, 의사소통 능력 등 수학을 행하는 과정이 수학 내용과 함께 강조되기도 하다가 최근에는 수학 교과 역량이 중요시되고 있다. 구체적으로 2022 개정 수학과 교육과정에서는 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리 역량이 수학 교과 역량으로 제시되었다(교육부, 2022). 또한 수학 수업은 수학 교육의 연구 동향을 바탕으로 하면서도 각 나라의 구체적인 사회 문화적 맥락 안에서 구현되기 때문에 나라별로 좋은 수학 수업의 양상이 달라진다(Cai, J. 외 3인, 2009; National Center for Education Statistics, 2003). 이와 같은 점을 감안하여 여기서는 좋은 수학 수업에 대한 전체적인 경향을 파악하기 위해서 국내외 몇 가지 문헌만을 간단히 정리한다.

미국수학교사협회인 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)에서는 좋은 수학 수업의 기준으로 수학 내용, 교수법, 학생에 대한 심도 깊은 교사의 지식, 수학적으로 가치 있는 과제의 선정, 학생의 수학 학습을 지원하는 환경, 의미 있는 수학적 담화, 학생 학습 및 교수 관행(teaching practices)에 관한 체계적이고 지속적인 수업 반성을 핵심적인 요소로 제시하였다. 또한 NCTM(2014)에서는 모든 학생들이 성공적으로 수학 학습을 하도록 기준이나 원리 차원에서만 강조되어 왔던 것을 구체적으로 수업에서 실행에 옮길 것을 촉구하면서 좋은 수학 수업을 위해 다음과 같은 8가지 수학 교수 관행을 제시하였다.

- 학생들의 학습에 초점을 두는 수학 목표를 설정하기
- 수학적 추론과 문제해결을 증진하는 과제를 구현하기
- 수학 개념 및 절차를 깊이 있게 이해하도록 수학적 표현을 활용하고 연결하기
- 수학적 아이디어에 대해서 이해를 공유할 수 있도록 의미 있는 담화를 촉진하기
- 학생들의 추론과 의미 이해를 평가하고 증진하기 위해서 의도 있는 질문을 제기하기
- 개념적 이해를 토대로 하여 절차적으로도 능숙할 수 있게 하기
- 수학을 학습할 때 학생들이 생산적으로 고군분투할 수 있도록 지원하기
- 학생들의 수학적 이해를 평가하고 수업을 조정할 때 학생 사고를 기반으로 하기

우리나라에서는 한국교육과정평가원에서 수업 개선을 위한 일련의 수업 평가 기준을 체계적으로 개발하였는데 그 평가 기준을 보면 어떤 것을 좋은 수학 수업으로 간주하는지 유추할 수 있다. 예를 들어 최승현·임찬빈(2006)은 좋은 수학 수업을 구현하기 위해 수학과 수업 전문성 기준을 상세하게 제시하였는데 이를 요약하면 다음과 같다.

우선 초등학교 수업의 공통 기준을 따라 대 영역으로 전문적 지식, 계획, 실천, 전문적 책임감을 설정하고, 중 영역으로 수학 교과 지식 및 내용 교수법, 학생에 대한 지식, 수업 설계, 교실 환경(수업 분위기) 조성, 수학 수업 실제, 전문성 발달을 설정하였으며 마지막으로 하위 평가 요소를

세분하여 전체 37개의 평가 요소를 도출하였다. 이러한 평가 요소에는 ‘수학 교과 내용에 대한 지식’, ‘수학의 유용성 관련 내용 교수법에 대한 지식’, ‘수학과 오류 대처 방안에 대한 지식’, ‘위계성, 연계성 고려한 수업 내용 구성하기’ 등과 같이 수학과와 특성을 반영한 요소를 포함하여 제시하고 있다(최승현·임찬빈, 2006).

한편 좋은 수학 수업에 대한 연구에서 전문적인 기관이나 단체 또는 수학 교육자와 같은 연구자의 관점뿐만 아니라 교사의 관점에 주목한 경우도 있다. 예를 들어 Cai, J. 외 3인(2009)은 동양과 서양의 여러 나라 수업에 대한 연구를 종합하면서 좋은 수학 교사의 특징과 좋은 수학 수업의 특징을 각각 6가지로 정리하였다. 우선 좋은 수학 교사의 특징은 다음과 같다(Cai, J. 외 3인, 2009).

- 교육과정 및 교과서를 포함하여 수학에 대한 견고한 지식을 가지고 있는 교사
- 가르치는 것에 대한 열정, 학생의 필요를 이해하려는 열망 등과 같은 개별 인성(personality)을 갖춘 교사
- 정보를 잘 전달하고 수업 시간에 다룰 핵심 내용을 명확하게 설명할 수 있도록 잘 준비된 교사
- 통찰력 있는 설명을 제공하고 학생들의 수학적 사고를 촉진하는 교사
- 학생들과 긍정적인 상호 작용이 있는 교사
- 기본적인 수업 관리(classroom management)를 잘하는 교사

좋은 수학 수업의 특징을 정리하면 다음과 같다(Cai, J. 외 3인, 2009).

- 학생들이 능동적으로 참여하는 수업
- 모둠 활동이나 수업 내 학생들 간의 협력과 상호 작용이 활발한 수업
- 학생 학습에 도움이 되도록 통제된 환경과 편안한 환경 간에 균형을 강조하는 분위기의 수업
- 전체적으로 일관되고 잘 구조화된 수업이면서 학생들의 이해에 따라 융통성이 있는 수업
- 학생들의 흥미가 진작되는 수업
- 이해, 사고, 문제해결 등을 촉진하는 교수법이 구현되는 수업

또 다른 예로 우리나라 초등학교 교사가 인식하고 있는 좋은 수학 수업에 대한 관점을 분석한 연구 결과, 교사들은 ‘학생 수준에 맞게 교육과정을 재구성하여 실시한 수업’, ‘자기주도적 학습 능력을 신장시키는 수업’, ‘학생들의 개인차를 고려하여 수업 내용을 선정한 수업’, ‘학생과 교사간의 상호 작용이 잘 이루어지는 수업’, ‘필수적인 수학과 기본 개념을 알 수 있도록 지도하는 수업’, ‘수학의 중요한 부분(수학의 기본 개념, 이해, 추론, 문제해결, 의사소통)으로 구성된 교육과정 하에 실시된 수업’ 등을 특히 좋은 수학 수업의 요소로 인식하였다.

이와 같은 국내외 문헌을 종합해 볼 때 좋은 수학 수업의 양상은 고정되어 있는 것이 아니라 여러 가지 요인과 상호 작용하면서 변화하고 있음을 알 수 있다. 또한 좋은 수학 수업의 요소가 수학 교실에서 이루어지는 직접적인 교수·학습 활동뿐만 아니라 교육과정 및 교육 내용, 수업 설계, 수업 반성 및 전문성 개발 등에 이르기까지 다양한 요소를 함축하고 있음을 알 수 있다. 이에 단편적 또는 일회적인 요소를 바탕으로 좋은 수학 수업을 준비하거나 평가하기보다는 장기적 또는 복합적인 요소를 포함하여 종합적인 판단이 필요함을 알 수 있다.

#### 나. 좋은 수학 수업의 토대

앞에서 살펴본 것처럼 좋은 수학 수업을 한마디로 정의하기 어렵지만 대부분의 문헌에서 공통적

으로 강조되는 것 중의 하나는 학생들과의 상호 작용을 바탕으로 수학적으로 의미 있는 논의가 이루어지는 수업이다. 이를 위해 교사는 단순히 수학 내용을 가르치는 역할 이외에 수학적 논의를 위해 주목해야 할 역할이 있다. 예를 들어 학생들이 스스로 문제해결 방법을 찾도록 안내하고 다양한 아이디어를 서로 공유하기, 학생들의 발표를 주의 깊게 듣고 여러 가지 접근 방법 중 어떤 방법이 수학적으로 보다 의미 있는지 판단하기, 수업 시간 중에 어떤 방법을 어느 정도로 깊이 있게 논의할 것인지를 결정하기, 수업 목표에 부합하면서 학생들의 수학적 사고를 촉진하기 위해서 의미 있는 발문을 제공하거나 해결 방법에 대한 설명 및 정당화를 요청하기 등과 같이 전통적인 의미에서의 수학 수업에서는 별반 고려되지 않았던 역할을 수행해야 한다(NCTM, 2014).

그러나 실제 수업 시간에 수학적으로 의미 있는 논의를 이끌기 위해서는 우선 적어도 두 가지의 토대가 마련되어야 한다.

첫째, 학습 수준과 성향이 다양한 학생들의 수업 참여를 존중하고 정답 여부에 관계없이 수학적 인 아이디어를 탐색하거나 그렇게 하기 위해 노력하는 태도 등을 충분히 격려하는 수학 교실 문화가 조성되어야 한다. 다른 교과에 비해서 수학 교과는 정답 여부가 명확하게 결정되기 때문에 학생들은 수학 문제를 풀 때 옳고 그름에 대한 관심이 높을 수밖에 없다. 수학 교실에서 정답이나 수학적으로 타당한 해결 방법만을 인정하는 분위기라면 어느 순간 학생들은 자신의 생각을 공유하거나 전체 학급에 발표하는 것조차 꺼려질 수 있으며 기껏해야 소극적인 방법으로 옳은 해결 방법과 정답만 공유하려고 할 것이다. 이에 ‘수학 문제를 풀 때 틀려도 괜찮다.’, ‘새로운 내용을 배울 때 틀리면서 배우는 것은 당연하다.’ 등의 생각이 학생들과 충분히 공유되어야 한다. 이런 측면에서 주어진 수학 문제와 관련하여 비록 정답은 아닐지라도 수학적으로 또는 학생 개인적으로 의미 있는 탐색을 하는 경우 그러한 사고 과정 자체를 존중하는 분위기가 조성되어야 한다. 또한 다른 학생들이 수학적 아이디어를 발표할 때는 이를 경청하고 자신의 아이디어와 어떤 점에서 비슷하고 어떤 점에서 다른지 비교 분석하도록 격려할 필요가 있다. 강조하건대 교사와 학생 그리고 학생과 학생 간에 상호 존중과 신뢰를 바탕으로 정답 여부에 관계없이 수학적 아이디어를 자유롭게 논의하고 수학적 오류나 실수에 대해서 관대하고 허용적인 수업 분위기가 조성되지 않는다면 수학적으로 의미 있는 논의를 기대하기는 어렵다.

둘째, 수학 수업의 궁극적인 지향점을 명확히 설정하고 매 수업 시간마다 수업의 목표를 구체적으로 정해야 한다(Smith, M. S. · Stein, M. K., 2018). 수업의 지향점이나 목표가 분명하지 않다면 무엇을 위한 좋은 수학 수업인지 파악하기가 어렵고 개별 수업이 학생들의 학습을 촉진하는 측면에서 의미 있게 구현되었는지 판단하기 어렵다. 실제 동일한 수학 내용을 다룬다고 하더라도 그 시간의 수업 목표가 무엇이나에 따라서 수업에서의 강조점은 얼마든지 달라질 수 있고 이러한 차이는 수학 수업의 질에 적지 않은 영향을 끼치기도 한다(Pang, J., 2016). 교사는 수업의 지향점이나 목표를 명확히 함으로써 가르치는 상황에서 발생하는 여러 가지 교수학적 판단을 현명하게 결정 내릴 수 있으며 수학 수업 전반에 걸쳐서 일관성을 유지할 수 있고, 학생들은 수학 수업에 참여하면서 구체적으로 무엇을 배워야 하는지 인지하면서 학습 과정을 점검할 수 있다(NCTM, 2014). 여기서 주의해야 할 것은 수학 수업의 지향점이나 목표를 수학 내용 영역으로 제한해서는 안 된다는 것이다. 우리나라에서 좋은 수학 수업은 줄곧 학생들에게 핵심 수학 내용을 명확하게 이해하게 하는 것과 관련되었기 때문에(Pang, J., 2009) 수학을 행하는 과정 또는 최근에 강조되는 수학 교과 역량 등은 기껏해야 부수적으로 다루지는 경향이 있다. 그러나 예를 들어 분수의 크기를 비교하는 방법을 가르치는 것에 수업의 목표를 둔 경우와 분수의 크기 비교를 매개로 학생들이 자신들의 전략과 풀이 방법의 합리성을 수학적으로 논의하는 과정을 배우는 것에 수업의 목표를 둔 경우에 두 수업의 구현 양상은 상당히 다를 것이다. 이런 측면에서 교사는 수학적으로 의미



있는 논의를 하는 것의 중요성을 학생들과 충분히 공유하고 매 수업 시간에 수학 내용뿐만 아니라 과정 또는 역량 측면에서 목표를 구체적으로 정하는 것이 필요하다(NCTM, 2014).

#### 다. 좋은 수학 수업의 설계

좋은 수학 수업을 설계하기 위해서 전반적으로 고려해야 할 것이 많다. 예를 들어 교사가 수학 수업을 계획하는 과정에서 생각해 봐야 할 질문을 다음과 같이 제시한다.

- 내가 가르치고자 의도한 수학을 얼마나 이해하고 있는가?
- 내가 가르칠 수학과 관련하여 학생들이 이미 알고 있는 것은 무엇인가?
- 학생들의 일반적인 발달 특성 및 인지적·신체적·사회 발달적 특징은 어떠한가?
- 학생들에게 어떤 종류의 과제를 제시할 것인가?
- 논의, 발문, 집단 편성 등을 통하여 학생들의 의사소통을 어떻게 촉진할 것인가?
- 교과서, 스토리텔링, 구체적 조작물, 테크놀로지 등 어떤 학습 자료를 사용할 것인가?

이 중에서 좋은 수학 수업을 설계하기 위해서 특히 주목해야 할 것은 수학적 과제(mathematical tasks)이다. 이는 학생들의 수학적 성장을 위한 지적 배경을 제공하는 것으로써 ‘학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 구성, 적용, 연습’이다(NCTM, 1991). 초등학교의 한 차시 수학 시간을 고려하여 수학 교과서에 대부분 2~3개의 주요 문제나 활동이 제시되므로 그러한 문제나 활동을 과제라고 이해하면 된다. 학생들은 수학적 과제를 해결하면서 수학을 배우게 되므로 교사가 학생들에게 어떤 수학적 과제를 제시하느냐가 매우 중요하다. 기본적으로 수업 시간에 다루는 학습 주제와 관련하여 핵심 교수·학습 요소를 반영하고 학생들의 선수 학습 정도와 동기 유발을 고려하면서 개인적으로 다양한 수준과 특성을 가진 학생들이 여러 가지 해결 전략으로 접근 가능한 과제를 고안해야 하며 그 과제를 통해 수학적 이해를 촉진하고 의미 있는 논의를 진작할 수 있어야 한다(NCTM, 2014). 이와 관련하여 Smith, M. S. · Stein, M. K.(2018)는 효과적인 수학적 논의가 이루어지기 위해서는 학습 목표에 부합되면서 학생들의 수준에서 인지적으로 도전적인 과제를 제시할 것을 강조한다. 수학 수업에서 제시하는 모든 수학 과제가 반드시 수준 높은 것들로만 제시되어야 하는 것은 아니지만 수준 높은 과제를 통하여 효과적인 논의를 촉진할 가능성을 높일 수 있다. 다만 여기서 교사가 매 수업 시간마다 핵심적인 수학적 과제를 직접 고안할 필요는 없다. 사실 교과서에는 그러한 가능성을 가진 과제가 포함되어 있기 때문에 교과서에 제시된 과제의 의도를 명확히 파악하고 학생들의 수준과 특성, 수업 목표와 핵심 내용 등을 감안하여 교과서의 과제를 의미 있는 방향으로 재구성하거나 변형하는 것만으로도 좋은 과제를 만들 수 있다(Smith, M. S. · Stein, M. K., 2018).

한편 교사는 핵심적인 수학적 과제에 대해서 자신의 학생들이 어떤 방법으로 어떻게 그 과제를 해결할지 최대한 다양한 해결 방법 및 전략을 생각해 보고 각각에 대해서 어떤 피드백을 제공하는 것이 좋을지 미리 고려해 봐야 한다. 특히 이 과정에서 타당한 해결 방법 및 전략뿐만 아니라 그렇지 않은 방법, 타당하지만 학습 목표와 직접적으로 연결되지 않는 답변, 과제를 잘못 이해하여 접근한 방법, 또는 과제를 해결하는 과정에서 자연스럽게 발생할 수 있는 오개념까지 포함하여 학생들의 다양한 접근 방법을 충분히 예상해 보는 것이 중요하다(Pang, J., 2016). 이와 같은 중요성을 바탕으로 Smith, M. S. 외 2인(2020)은 초등학교 교사가 학생들의 다양한 반응을 잘 예상하도록 돕기 위해 생각해 봐야 할 핵심 질문을 [표 2-2]와 같이 제시하였다. 특히 여기서 ‘학생 사고에 반응하기 위해 계획하기’와 관련하여 교사에게 두 가지 종류의 질문을 준비할 것을 권장하고 있다.

이에 학생의 현재 사고를 가시화하여 해당 학생이 주어진 과제를 어떻게 해결하고 있는지 교사가 잘 이해할 수 있도록 돕기 위한 ‘평가적 질문(assessing questions)’과 학생의 수학적 사고가 더 발전될 수 있도록, 해당 수학 수업의 목표를 향해 더 나아갈 수 있도록 돕기 위한 ‘발전적 질문(advancing questions)’을 적절하게 마련할 것을 강조하고 있음에 유의할 필요가 있다.

[표 2-2] 학생 반응에 대한 교사의 예상하기 관행을 지원하기 위한 핵심 질문(Smith, M. S. 외 2인, 2020)

구성 요소	핵심 질문
문제 속으로 들어가기	선생님은 이 과제를 어떻게 해결합니까?
	학생들은 이 과제에 어떻게 접근할 것 같습니까?
	학생들이 이 과제를 해결할 때 어떤 어려움에 직면할 것 같습니까?
학생 사고에 반응하기 위해 계획하기	학생 사고를 도출하기 위해 어떤 평가적 질문을 할 것입니까?
	학생 사고를 더 향상시킬 수 있도록 돕기 위해서 어떤 발전적 질문을 할 것입니까?
학생 사고를 알아차리기 위해 계획하기	학생들이 과제를 수행하고 있을 때 어떤 전략을 보기를 원합니까?

학생 반응 예상하기와 관련하여 Smith, M. S. 외 2인(2020)은 교사가 직면하게 되는 어려움을 다음과 같이 세 가지로 설명하였다. 즉, 교사 자신이 문제를 해결한 방법을 뛰어넘어 학생들이 문제를 해결할 때 활용할 것 같은 다양한 접근 방법을 예상하기, 과제를 시작조차 못하는 학생들을 돕기 위해 어떻게 할지 준비하기, 학생들이 단지 과제의 해결 방법을 찾는 것에 만족하는 것이 아니라 해당 수업 시간에 다룰 수학적 목표나 아이디어를 제대로 이해하도록 돕는 질문을 준비하기이다. 이와 관련하여 우리나라 초등학교 교사들은 예상하기를 수학 설계에 적용하는 과정에서 학생 반응에 대한 구체적인 발문과 피드백을 계획하기, 학생의 옳은 접근 방법을 예상하기, 학생의 틀린 접근 방법을 예상하기 등을 어려워하는 것으로 나타났다. 이렇듯 교사가 수업을 설계할 때 학생들의 반응을 다양하게 예상하고 그에 대응하여 구체적인 발문과 피드백을 사전에 준비하는 것이 어렵기는 하지만, ‘예상하기’를 포함하여 수업 설계를 잘하면 실제 수업 중간에 순간적인 판단을 즉석에서 선부르게 내릴 위험 부담을 줄일 수 있고, 수업의 목표와 학생 수준을 감안하며 수학적으로 의미 있는 방향으로 수업을 이끌어 갈 수 있다는 측면에서 수업 설계를 상세히 할 것을 권장한다(Smith, M. S. · Stein, M. K., 2018).

## 라. 좋은 수학 수업의 실행 및 교사가 유의해야 할 점

학생들과의 상호 작용을 바탕으로 수학적으로 의미 있는 논의가 이루어지는 수업을 좋은 수학 수업의 핵심 요소로 강조하는 문헌이 많음에도 불구하고 정작 교사가 그와 같은 수업을 구현하기 위해서 어떻게 해야 할지 수업 전체를 아우르면서 구체적으로 안내하는 경우는 드물다. 예외적으로 Smith, M. S. · Stein, M. K.(2018)가 제시한 5가지 교수 관행(teaching practices)은 구체적인 수업 사례를 예화로 들면서 교사들이 해야 할 ‘일’에 대해서 구체적으로 안내한다. 이 관행 중 첫 번째는 ‘예상하기’로 앞에서 살펴본 수업 설계와 관련된다. 수업 중에는 나머지 4개의 관행, 즉 점검하기(monitoring), 선정하기(selecting), 계열 짓기(sequencing), 연결하기(connecting)를 충실히 실행하면 된다. 이러한 일련의 관행을 따른다고 해서 자동적으로 좋은 수학 수업이 된다고 말할 수는 없지만, 적어도 수업 중에 일어날 수 있는 여러 가지 우발적인 상황에 대해서 유연



하게 대처할 수 있고 학생들의 다양한 해결 방법을 토대로 수학적으로 풍부한 논의를 이끌 수 있는 가능성을 높인다는 차원에서 중요하다. 이에 각각의 관행에 대한 설명과 실제 그러한 관행을 우리나라 초등학교 수학 수업에 적용하면서 교사들이 직면했던 어려움을 정리하면 다음과 같다. 여기서 이러한 어려움을 소개하는 이유는 추후 이러한 관행을 자신들의 수학 수업에 적용하려고 시도하는 교사들에게 실제적인 시사점, 미리 유의해야 할 점 등을 제공할 수 있을 것으로 기대되기 때문이다.

‘점검하기’는 수업 중 학생들의 다양한 해결 방법이나 접근 방법을 파악하고 개별 또는 모둠별 학생들에게 과제에 의미 있게 접근할 수 있도록 적절한 질문이나 간단한 피드백을 제공하는 것이다. 이와 같은 측면에서 점검하기는 단지 학생들이 말하고 있는 것을 듣거나 관찰하여 점검표에 체크리스트 형태로 표시하는 것에 머무르는 것이 아니라 학생들의 다양한 수학적 사고와 접근 방법에 주목하는 것이어야 한다. 이때 교사의 적절한 질문을 통해 학생들은 자신의 수학적 사고나 방법을 수정하거나 정교화 할 수 있으며 교사는 학생들이 어느 정도 이해하고 있는지 파악하여 후속 학습의 방향을 점검할 수도 있다. 이러한 점검하기 활동은 후속 전체 논의에서 어떤 수학적 아이디어에 초점을 맞출 것인지 그리고 누구를 발표시킬 것인지 결정하기 위한 기반이 된다.

그러나 실제 수학 수업에서 교사가 돌아다니면서 학생들의 해결 과정을 점검하는 일은 매우 도전적이다. 상대적으로 짧은 시간에 많은 학생들의 해결 과정을 파악해야 하는데 모든 학생들의 해결 방법을 점검하기 또는 학생들의 해결 방법을 정확하게 이해하기 등은 교사들이 공통적으로 어려워하는 부분이다. 이와 같은 어려움을 조금이라도 해소하기 위해 ‘점검표’를 활용할 수 있는데 대개 점검표에는 교사가 미리 학생들의 해결 방법을 예상해서 적는 칸, 학생들의 사고를 가시적으로 만들고 학생들로 하여금 자신들의 생각을 명료화하게 하며 모든 학급 구성원들이 과제에 잘 참여하고 있는지 확인하고 학생들이 주목해야 할 필요가 있는 과제 양상을 고려하도록 독려하는 질문을 적는 칸, 각 전략에 대해 ‘누가 그리고 무엇을 하는지’ 적는 칸, 그리고 전체 논의 시간에 어떤 순서로 선정할 것인지를 적는 칸 등이 있다(Pang, J., 2016). 다만 교사가 점검한 것을 점검표에 기록할 때도 예를 들어, 학생이 사용한 방법 그대로를 정확하게 기록하기가 어렵다거나, 교사의 예상하기 수준을 뛰어넘어 학생이 새로운 해결 방법을 활용했을 때 그것을 점검표에 적절히 분류하거나 추가하는 데 어려움을 겪기도 하므로, 교사가 학생들의 수준과 수업 여건을 고려하여 어떻게 효율적으로 점검표를 활용할 것인지에 대한 고민이 필요하다.

‘선정하기’는 학생들의 개별 또는 모둠별 활동 이후에 전체 논의에서 어떤 수학적 아이디어에 초점을 둘 것인지와 그리고 어떤 학생이 발표하게 할 것인지를 결정하는 것이다. 이러한 선정하기 관행이 중요한 이유는 학생들이 궁극적으로 학습하게 될 수학적 아이디어를 결정하기 때문이다. 교사는 수학 수업의 궁극적인 지향점 및 학습 목표를 염두에 두고 학생들의 다양한 해결 방법 중 어떤 방법이 지향점 및 목표에 부합되는지 판단하여 해결 방법을 선정하게 된다. 또한 동일하거나 유사한 방법으로 문제를 해결하는 학생들도 있기 때문에 교사는 누가 해당 내용을 발표하게 될지도 선택해야 한다. 이런 측면에서 교사가 개별 학생들의 문제해결 접근 방법을 알지 못한 상태에서 발표하고자 손을 든 학생들 중에 무작위로 지명하는 것은 수학적으로 의미 있는 논의를 이끌어가는 데 효과적이지 못하다.

선정하기와 관련하여 교사들은 학생들의 해결 방법이 다양하지 않을 때, 특히 논의에서 강조하려고 했던 해결 방법을 활용한 학생들의 수가 매우 적은 경우, 그 해결 방법을 활용한 특정 학생이 발표하도록 독려해야 했기에 어려움을 겪기도 하였다. 또한 제한된 시간 내에 최대한의 수학 학습 기회를 제공하기 위하여 중복되는 해결 방법을 가진 학생을 선정하는 것을 지양해야 하는 것을 알

면서도 발표 의지가 매우 강한 학생들의 발표 기회를 제한하는 데 어려움을 겪었다. 이처럼 교사들은 선정하기와 관련하여 어떻게 해야 하는지 전반적인 지침을 알고 있더라도 학생들에게 공정한 발표 기회를 제공한다는 측면과 학생들의 발표 의지 또는 참여 여부에 따라 융통성을 발휘할 상황이 있음을 알 수 있다.

‘계열 짓기’는 전체 논의에서 해결 방법을 공유할 학생들의 발표 순서를 결정하는 것이다. 제시된 문제에 대해서 가장 세련된 방법이면서 쉽게 접근 가능한 방법을 맨 처음 발표하게 하면 후속 발표의 의미가 무색해지기 마련이다. 이와 같은 측면에서 교사는 학생들의 해결 방법이나 아이디어를 공유하는 순서를 의미 있게 정함으로써 학생들이 논의를 통해 학습 목표를 효과적으로 도달할 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 일반적으로 계열을 정하는 방식의 예로는 해당 주제를 학습하는 과정에서 다수의 학생들이 범하는 오개념을 먼저 다루면서 학생들의 잘못된 이해를 명확히 짚어 주고 이후에 올바른 해결 방법이나 전략을 발표하기, 그림이나 구체적 조작물 등을 이용한 전략을 먼저 발표하게 하고 수식을 이용한 전략과 같이 추상적인 전략을 나중에 발표하기, 다수의 학생들이 사용한 해결 방법이나 전략을 먼저 발표하게 하고 소수의 학생들이 사용한 방법이나 전략을 나중에 발표하기 등이 있다.

계열 짓기와 관련하여 교사가 예상하지 못한 방법으로 문제를 해결한 학생이 있는 경우, 교사는 순간적으로 그 방법이 논의할 만한 가치가 있다고 판단하여 선정하였으나 정작 수학적으로 의미 있는 방법으로 계열 짓는 데는 어려움을 느끼기도 하였다. 또한 선정하기와 같은 맥락에서 학생들의 해결 방법이 다양하지 않거나 논의에 필요한 해결 방법을 활용한 학생의 수가 적은 경우 계열 짓기를 어려워하였다. 이에 계열 짓기 방식은 수업 목표 및 핵심 아이디어뿐만 아니라 학생들의 수준과 성향 등을 종합적으로 고려하여 결정해야 함을 알 수 있다.

마지막으로, ‘연결하기’는 학생들이 공유한 다양한 해결 방법의 공통점과 차이점을 찾으며 해결 방법을 서로 연결하는 것뿐만 아니라 학생들의 해결 방법을 다시 수업의 핵심 수학적 아이디어와 연결하는 것이다(Smith, M. S. · Stein, M. K., 2018). 연결하기를 통해 학생들의 다양한 해결 방법을 공유만 하는 수준을 뛰어넘어 해결 방법 이면에 숨어 있는 수학적 공통점이나 구조 등을 파악하게 하여 학생들의 수학적 사고를 한층 높일 수 있다. 또한 다양한 접근 방법 중 수학적 효율성이나 정확성 등을 판단하게 할 수도 있다.

연결하기는 앞에서 제시한 5가지 관행 중 교사에게 가장 도전적인 경우가 많다(Pang, J., 2016). 왜냐하면 연결하기를 성공적으로 실행하기 위해서는 일단 예상하기부터 계열 짓기에 이르기까지 각 단계가 충실하게 실행되어 있어야 하고, 교사는 학생들에게 여러 가지 해결 방법 이면에 내재되어 있는 수학적 아이디어를 학생들 수준에 맞게 가시적이고 이해할 만하게 질문을 제공해야 하기 때문이다. 실제로 교사들은 학생들의 여러 가지 해결 방법을 서로 연결하거나, 학생의 해결 방법과 학습 목표를 다양한 관점으로 연결하는 발문을 적시에 제시하는 것을 어려워하였다. 또한 교사의 직접적인 개입과 학생의 참여 간의 균형을 유지하는 데도 어려움을 겪었는데, 주로 교사가 지나치게 많이 설명하거나 수업 시간이 부족하여 논의에 필요한 핵심 내용을 직접적으로 제시하는 경우가 이에 해당되었다. 이에 교사는 해당 수학 내용에 대한 깊이 있는 지식을 가지고 있어야 하며 학생들이 알고 있는 것을 바탕으로 하되, 차원 높은 수학적 이해나 통찰에 이를 수 있도록 연결할 내용을 잘 선정하는 지혜가 필요하다. 또한 필요한 논의 시간이 충분히 확보될 수 있도록 전체 수업 시간을 효율적으로 운영할 필요가 있으며 학생들이 논의 전반에 활발히 참여할 기회를 제공하는 것이 중요하다.

#### 마. 좋은 수학 수업에 대한 지속적인 성찰

좋은 수학 수업에 대한 연구를 살펴보면 실제 수업이 이루어지는 교수·학습 활동뿐만 아니라 수업의 설계부터 수업 반성에 이르기까지 수업 전·중·후의 다양한 요소를 포함하고 있음을 알 수 있다. 또한 수업 설계—구현—반성의 주기가 한 번의 수업으로 끝나는 것이 아니라 한 단위, 한 학기, 1년, 그리고 궁극적으로는 장기간의 교사 경력 동안 반복하게 함으로써 수업 전문성을 신장하는 것까지를 가정하고 있다. 이와 같은 측면에서 전반적인 수업 계획 및 실행 과정에 대해서 개인적으로 그리고 집단적으로 성찰하는 기회를 가지는 것이 중요하다.

개인적인 성찰을 위해서는 우선 자신의 수학 수업을 녹화하거나 구체적으로 기록하는 것이 필요하다. 또한 자기 평가를 주로 하게 되는데 최대한 근거 있는 성찰이 될 수 있도록 여러 가지 자료와 방법을 활용하여 자신이 지향하는 수학 수업의 모습과 견주어 가며 구체적인 교수 행동을 포함하여 수업을 체계적으로 점검하는 것이 필요하다. 예를 들어 구현된 수업의 장점과 단점, 수업에서 교사의 의도대로 진행된 부분과 그렇지 않는 부분에 대한 반성 및 원인 추적, 해당 수업을 다시 가르칠 기회가 있을 때 꼭 수정하고 싶은 부분에 대한 점검과 그 이유, 학생의 수학적 사고와 관련하여 새롭게 알게 된 내용 등을 면밀히 분석할 수 있을 것이다. 이 과정에서 교사는 자신의 수학 수업의 궁극적인 지향점 및 목표에 대해서 비판적으로 고찰해 볼 수도 있다. 특히 초등학교 교사는 중·고등학교 교사에 비해서 좋은 수학 수업을 구성하는 요소 각각에 대해서 동의하는 정도가 가장 높은 경향이 있기 때문에(Pang, J. · Kwon, M. S., 2015), 자신의 수업을 성찰하는 동안 정말 수학 수업에서 궁극적으로 추구하는 바가 무엇인지 명확히 인식하는 것이 필요하다.

한편 수학 수업에 대해서 반성할 때 교사는 자연스럽게 자신의 교수 행동만을 집중적으로 분석하게 된다. 그러나 수업은 기본적으로 교사, 학생, 내용을 바탕으로 하고 있기 때문에 교사 자신의 교수 행동만 분석하는 것을 뛰어넘어 그러한 행동이 학생의 학습과 어떻게 연계되는지 면밀히 점검할 필요가 있다(NCTM, 2014). 개별 학생의 학습 결과에 대한 평가를 바탕으로 후속 수업에서 무엇을 어떻게 고려할 것인지, 개별 학생에게 어떤 피드백을 제공할 것인지 등에 대한 계획을 구체적으로 수립하는 것도 중요하다.

또한 좋은 수학 수업을 구현하기 위해서 자신의 수업 계획 및 실행 과정 전반에 걸쳐서 개인적인 성찰이 기본이겠지만 동료 교사나 수학 수업 전문가를 포함한 전문적 학습 공동체를 활용하는 것도 효과적이다(김원·임웅, 2020; Smith, M. S. · Stein, M. K., 2018). 실제 초등학교 교사 공동체를 중심으로 앞에서 언급했던 5가지 관행을 적용했을 때 대부분의 학년에서 실행 수준이 상승하거나 높은 수준으로 유지되는 경향이 있음을 밝혔다. 여기서 중요한 것은 수학 수업에 대한 분석이나 성찰의 잘잘못을 가리거나 평가 자체에 목적이 있는 것이 아니라 다양한 피드백을 바탕으로 자신의 수학 수업에 대한 구체적인 아이디어나 개선할 점을 찾음으로써 수학과 수업 전문성을 신장하겠다는 자세일 것이다. 이에 수학과 수업 전문성을 신장하는 것이 필요하다는 점을 분명히 인식하고 전문적 학습 공동체, 다양한 교사 연수나 워크숍, 최신 연구 동향을 반영한 문헌이나 수업 자료 등을 적극적으로 활용하여 수학을 가르치는 데 필요한 다양한 지식과 교수 방법을 강화하는 것이 필요하다. 또한 교사는 좋은 수학 수업을 구현하는 주체자로서 정체성을 가지고 외부에서 얻은 새로운 정보에 대해서 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 자신의 수학 수업에서 적극적으로 적용하면서 그 활용 가능성을 탐색해 보는 과정을 반복함으로써 자신의 방법을 찾는 것이 중요하다.

## ② 초등학교 수학과 수업 모형

### 1 수학 수업과 수업 모형

수학 수업은 교사, 학생, 가르치는 교과 내용 간의 복잡한 상호 작용 속에서 이루어진다. 따라서 수업 목표에 효과적으로 도달하고 수업 과정이 어떻게 이루어지는지 예측하기 위해서는 수업 현상을 보다 단순화할 필요가 있다. 수업 현상을 단순화한 수업 모형은 수업의 기본적인 방향과 흐름을 설계하는 데 많은 도움이 된다.

수업 모형(models of instruction)이란 복잡한 수업 흐름이나 현상을 특징적인 요인을 중심으로 단순화한 설명 체제나 구조를 이룬다(김민환·추광재, 2015). 다시 말해 수업 모형은 수업의 주요 흐름이나 단계를 특정 요인에 따라 압축하여 구조화한 틀이라고 할 수 있다. 따라서 교사는 수업 모형을 통해 수업의 기본적인 방향이나 흐름을 파악할 수 있다. 다만 수업 모형이 수업 설계(instructional design)와 같은 의미는 아니다. 구체적으로 수업 설계는 실제 수업을 실행하기 위해 구체적인 목표를 설정하고 그 수업 목표에 도달하기 위해 다양한 요소들을 고려하여 수업의 전반적인 흐름과 그에 따른 구체적인 활동 방안들을 계획한다. 그러나 수업 모형은 어느 수업에서도 적용할 수 있는 추상화된 틀이기 때문에 단일 수업의 맥락을 반영하지는 않는다. 이에 교사는 수업을 설계하는 과정에서 자신의 수업 맥락에 적절한 수업 모형을 선정하고 적용할 수 있다.

초등학교 수학 수업에서 활용될 수 있는 수업 모형은 다양하지만 그중 자주 활용될 수 있는 수업 모형인 개념 학습 모형, 원리 탐구 학습 모형, 귀납 추론 학습 모형, 문제해결 학습 모형에 대해서 살펴보고자 한다(남승인 외 9인, 2019). 수학 수업이 일반적으로 '도입→전개→정리 단계로 구성된다는 것을 고려하면 각 수업 모형마다 전개에 해당하는 수업 단계가 다르게 제시된다.

### 2 수학 수업 모형을 적용할 때의 고려 사항

수학 수업에서 어떤 수업 모형을 선정하고 수업에 적용할지는 주로 수업을 계획하는 과정에서 고려된다. 이때 수업에 적절한 수업 모형을 선정하기에 앞서 교사는 수업 모형의 특징 및 각 단계의 의미를 충분히 이해해야 한다. 각각의 수업 모형은 그 수업에서 특히 강조하고 싶은 특징적인 요인에 따라 수업의 흐름과 단계가 다르게 구성되어 있기 때문이다. 이에 교사는 각각의 수업 모형의 강조점을 이해하고 각 단계별로 어떤 활동과 발문이 구성될 수 있는지 명확하게 이해할 필요가 있다.

다음으로 교사, 학생, 교과 내용을 충분히 고려해서 수업 모형을 선정해야 한다. 무엇보다 교사는 수업에서 학생에게 무엇을 가르칠 것인지, 즉 가르치고자 하는 내용의 성격과 수업 목표를 명확하게 수립한 후에 그에 부합하는 모형을 선정해야 한다. 예를 들어 학생에게 원과 사각형의 정의와 같은 수학 개념을 지도할 것인지, 이미 배운 지식을 활용하여 문제를 해결하는 방법과 그 과정에 대해 지도할 것인지에 따라 적합한 수업 모형이 다를 수 있다. 그 외에도 교사의 수학 교수학적 내용 지식, 수학과 교수·학습에 대한 성향, 학생들의 수학 능력 및 선수 학습의 이해 정도, 수학 학습에 대한 성향 등을 고려할 필요가 있다.

마지막으로 수업 모형은 수업의 흐름과 단계를 추상화하여 나타냈기 때문에 교사가 구현하고 싶은 실제 수학 수업의 맥락에 적용하기 어려운 경우가 많다. 이에 수업 모형을 적용할 때는 수업 맥락에 따라 적절하게 수업 모형을 수정하거나 서로 다른 두 개 이상의 수업 모형을 혼합하여 적용할 수 있다. 나아가 교사가 스스로 기존의 수업 모형을 활용하여 자신만의 창의적인 수업 모형을



개발하여 적용해도 좋다. 중요한 것은 수업 모형을 그대로 적용하는 여부가 아니라 학생이 의미 있게 수학을 배울 수 있는 수학 수업을 구현하는 것이기 때문이다. 이에 다시 강조하건대 교사는 수업 목표, 학생, 수업 상황 등을 고려하여 더 좋은 수학 수업을 구현하기 위한 수업 모형을 선정하고 필요에 따라 적절히 수정하여 적용해야 한다.

## 가. 개념 학습 모형

### (1) 특징

개념 학습 모형은 학생이 수학적 개념을 올바르게 형성하고 획득하는 데 초점을 둔다. 개념을 형성하고 획득하는 것은 곧 개념의 속성을 확인하는 것이기 때문에, 개념 학습에는 개념의 속성을 조사하는 과정이 포함되어 있다. 개념을 지도하기 위한 학습 모형은 개념 형성 모형, 속성 모형, 원형 모형, 상황 모형 등 다양하며 그중 많이 사용되는 개념 형성 모형과 속성 모형의 단계에 대해 살펴보면 아래와 같다.

### (2) 배경지식

남승인 외 9인(2019)에 따르면 개념은 ‘일반적으로 어떤 사물이나 현상, 대상들이 갖는 개별적인 속성 중에 이질적인 요소와 특수성은 배제하고 공통적인 속성을 추상화하여 언어, 문자 기호 등으로 통칭한 것’을 말한다. 또한 개념은 구체적으로 존재하는 것이 아니라 추상적이며, 가장 대표적인 개념을 원형(prototype)이라고 한다. 개념은 내포와 외연으로 구분할 수 있는데 내포는 어떤 개념이 가지고 있는 속성을 의미하며 외연은 한 개념과 다른 개념을 포함하는 집합을 외형적으로 구별할 수 있게 하는 것을 의미한다. 예를 들어 여러 도형 중에서 두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형으로, 세 변의 길이가 같은 삼각형을 정삼각형으로 구분하는 것은 각 도형의 속성에 따라 도형을 구분하는 것이므로 내포에 의한 개념의 구별로 볼 수 있다. 그러나 여러 도형 중에서 외형적 모양을 보고 이등변삼각형과 정삼각형으로 구분하는 것은 외연에 의한 개념의 구별로 볼 수 있다.

수학적 개념은 그 속성에 따라 개별 개념, 관계 개념, 조작 개념으로 분류된다(교육부, 2017). 개별 개념은 개별적인 대상을 나타내는 개념으로 분수, 짝수, 원 등이 예가 된다. 관계 개념은 몇 개의 대상 사이의 관계를 나타내는 개념으로 공배수, 수직, 크다, 비례 등이 예가 된다. 마지막으로 조작 개념은 두 가지 이상의 개별적인 대상을 조작하는 개념으로 사칙계산, 평행이동 등이 예가 된다.

개념을 학습할 때 활용되는 수학적 용어와 기호에 대해 살펴보면 다음과 같다(조성형·김홍찬, 2009). 수학적 용어는 수학에서 사용되는 개념 중 말이나 글로 표현된 것을 말하며, 정의와 공식, 정리, 법칙 등을 포함한 수학의 모든 개념을 의미한다. 수학적 용어는 학습자가 지각할 수 있는 세계를 표현하는 구체적인 용어부터 추상적인 개념을 나타내는 것까지 다양하다. 구체적인 참조물로부터 더 높은 수준으로 갈수록 용어는 더 추상적이 된다. 한편, 수학적 기호는 수학적 용어로 정의된 수학적 개념을 더욱 간결하고 추상적이며 명확한 형태로 규정한 것이다. 수학적 기호는 규약적 기호와 상징적 기호로 구분될 수 있다. 규약적 기호는 기호가 어떤 실체를 나타낼 때, 그 실체가 오로지 인간의 규약에 의해 생성된 기호를 의미하며, 대수적 기호가 규약적 기호의 많은 부분을 차지한다. 상징적 기호는 기호와 그 의미하는 실체가 자연스럽게 연결되는 기호를 의미하며,  $<$ ,  $\Delta$ ,  $\perp$  등의 기호가 해당된다. 학습하는 과정에서 학생들이 비형식적으로 상징적 기호를 사용하게 하되, 수학적 내용을 주장하거나 증명할 때는 규약적인 기호를 사용하게 하는 것이 필요하다.

### (3) 단계

#### ① 개념 형성 모형

개념 형성 모형에서 중요한 점은 개념을 이해하기 위하여 여러 가지 적절한 범례를 경험해야 한다는 점이다. 남승인 외 9인(2019)에 의하면 범례를 제시할 때는 주어진 개념의 속성이 포함된 정례(example)와 그렇지 않은 비례(non-example)를 제시해야 한다. 범례를 제시하는 방법에는 크게 세 가지가 있다. 정례와 비례를 차례대로 제시하는 방법, 여러 개의 정례를 제시하고 그 후에 여러 개의 비례를 제시하는 방법, 정례와 비례를 적당한 비율로 섞어서 동시에 섞어서 제시하는 방법이다. 범례를 제시하는 세 가지 방법 중에서 정례와 비례를 적당한 비율로 동시에 제시하는 방법이 학생들의 개념 형성에 가장 효과적이라고 알려져 있다(남승인 외 9인, 2019). 개념 형성 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동을 살펴보면 [표 2-3]과 같다.

[표 2-3] 개념 형성 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동

단계	교수·학습 활동
범례 제시 및 범례 분류하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 학생들에게 개념 정의에 필요한 범례(정례와 비례) 제시하기</li> <li>• 조작, 관찰 등을 통해 여러 가지 속성에 따라 범례를 분류하기</li> <li>• 분류된 예들의 공통 성질을 암묵적으로 생각하기</li> </ul>
공통 성질 추상화하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 분류한 정례들의 공통적인 속성을 명확하게 설명하기</li> <li>• 분류한 정례들의 공통 성질을 추상화하기</li> </ul>
개념 정의하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 수학적인 용어와 기호로 개념을 정의하기</li> </ul>
개념의 속성 조사하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 정의한 개념의 결정적 속성과 비결정적 속성을 조사하기(생략 가능)</li> </ul>
개념 익히기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 유사한 문제에 적용하여 개념 익히기</li> </ul>

#### ② 속성 모형

속성 모형은 개념을 지도할 때 예보다는 개념이 가진 속성(성질)에 초점을 두어 가르치는 개념 학습 모형이다. 속성 모형과 개념 형성 모형은 모두 개념을 지도할 때 사용될 수 있는 수업 모형이라는 공통점이 있으나 개념 형성 모형에서는 제시된 범례를 분류하고 공통적인 속성을 추상화하여 개념을 정의하는 반면 속성 모형에서는 개념을 먼저 정의하고 속성을 조사한 뒤 정례와 비례를 검토한다는 차이점이 있다. 속성 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동을 살펴보면 [표 2-4]와 같다.

[표 2-4] 속성 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동

단계	교수·학습 활동
개념 정의하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 배울 개념을 정의하기</li> </ul>
속성 조사하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 배울 개념의 결정적 속성과 비결정적 속성을 제시하고 검토하기</li> </ul>
정례와 비례 검토하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 배울 개념의 속성에 맞는 예와 맞지 않는 예를 제시하고 검토하기</li> </ul>
개념 분석 및 익히기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 배운 개념을 토대로 관련 개념과 확대된 개념의 관계를 살펴보기</li> <li>• 개념을 익히고 새로운 상황에 개념을 적용하기</li> </ul>



#### (4) 적용 시의 유의점

- ① 상위 개념이나 추상적 개념보다 하위 개념이나 구체적 개념을 분명하고 체계적으로 제시하여 학생의 개념 학습을 돕는다.
- ② 개념과 관련된 구체물을 조작하는 활동을 수반함으로써 학생의 개념 학습을 돕는다.
- ③ 유사한 개념과 유사하지 않은 개념을 서로 대비시키거나 이미 배운 개념과의 공통점과 차이점을 살펴봄으로써 개념에 대한 이해를 명확히 하고 여러 개념의 상호 관계를 이해할 수 있게 한다.
- ④ 개념과 관련된 다양한 예를 준비하여 개념을 포괄적으로 이해할 수 있게 한다.
- ⑤ 구체적 모델, 시각적 모델, 언어적 표현, 기호적 표현 등으로 수학적 개념을 나타내어 보게 함으로써 개념에 대한 다양한 표상을 강조한다.

### 나. 원리 탐구 학습 모형

#### (1) 특징

원리 탐구 학습 모형은 학생이 이미 알고 있는 지식을 바탕으로 수학자들처럼 스스로 새로운 지식을 구성하고 수학적 원리를 발견하는 과정을 경험하게 하는 것에 초점을 둔다. 따라서 학생 스스로 수학적 사실, 원리, 법칙을 찾아가는 탐구 과정이 매우 강조된다.

#### (2) 배경지식

수학에서 원리란 ‘모든 사각형의 내각의 합은  $360^\circ$ 이다.’, ‘자연수는 무수히 많다.’와 같이 수학의 일반적 성질을 증명 가능한 형태의 명제로 나타낸 것을 이르며 법칙이란 덧셈의 교환법칙, 결합법칙과 같은 수학적 약속이나 공리로서 수학의 기본 성질을 이룬다(강완 외 5인, 2022). 원리 탐구 학습 모형은 학생이 이미 알고 있는 지식으로부터 새로운 사실을 도출하여 수학적 원리나 법칙 만들기를 강조하기 때문에 학생의 연역적 추론이 요구된다. 이에 교사는 원리 탐구 학습 모형을 적용하기 전에 학생들이 선수 학습 내용을 충분히 이해하고 있는지 확인해야 한다.

#### (3) 단계

원리 탐구 수업에서는 학생들이 이미 알고 있는 사실로부터 수학적 원리에 관한 지식뿐만 아니라 수학적 원리를 발견하는 탐구 과정 자체를 경험할 수 있어야 한다. 따라서 학생의 인지적 갈등을 유도할 수 있는 문제 상황을 통해 수학적 원리의 필요성을 인식하게 하는 활동이 필수적이다. 원리 탐구 학습 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동을 살펴보면 [표 2-5]와 같다.

[표 2-5] 원리 탐구 학습 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동

단계	교수·학습 활동
새로운 문제 상황 제시하기	• 새로운 문제 상황을 제시하여 학생들의 인지적 갈등 상황 유도하기
수학적 원리의 필요성 인식하기	• 이전에 습득한 지식을 활용하여 문제해결 방법을 탐색함으로써 일반적인 수학적 원리의 필요성 인식하기
수학적 원리가 내재된 조작 활동하기	• 학습해야 할 수학적 원리가 내재되어 있는 조작 활동하기
형식화하기	• 자신의 방법으로 형식화를 구상해 보고 수학적 원리를 형식화하기
익히기 및 적용하기	• 수학적 원리와 형식화가 충분히 이해되도록 익히고 적용하기

#### (4) 적용 시의 유의점

- ① 학생의 적극적이고 자발적인 참여를 통하여 학습자 스스로 수학적 원리를 탐구할 수 있게 한다.
- ② 교사는 학생 스스로 탐구할 기회를 충분히 제공하되 학생 수준을 파악하여 안내의 정도를 조정한다.
- ③ 학생 스스로 원리를 탐구하는 과정을 강조하고 교사는 학생이 탐구 과정을 성찰할 수 있도록 이끌면서 탐구심을 북돋아야 한다.
- ④ 다양하고 충분한 자료를 수집하고 분석하며 이를 통해 수학적 원리를 찾아가는 과정에서 논리적 사고의 중요성을 강조한다.

### 다. 귀납 추론 학습 모형

#### (1) 특징

귀납 추론 학습 모형은 학생이 스스로 문제 상황에 관한 자료를 수집하고 검증하는 과정을 거쳐 결론을 도출하는 데 초점을 둔다. 이에 교사는 학생에게 이미 구조화된 지식을 전달하기보다 학생이 스스로 수학적 지식을 구성할 수 있도록 해야 하며 학생이 추론해야 할 적절한 문제 상황을 제공해야 한다.

#### (2) 배경지식

귀납 추론은 추론의 유형 중 하나로, 추론은 귀납 추론, 유비 추론, 연역 추론으로 나눌 수 있다(남승인 외 9인, 2019). 귀납 추론은 개개의 사례를 관찰하여 이러한 사례들을 포함하는 일반 명제를 확립시키는 추론의 형태로 부분적이거나 특수한 사례로부터 전체적이고 보편적인 수학적 성질 또는 법칙을 이끌어 낼 수 있다. 참고로 유비 추론(또는 유추)이란 두 대상 사이에 존재하는 유사성을 근거로 한쪽 대상에서 존재하는 성질이 다른 쪽의 대상에도 성립할 것이라 추론하는 방법이다. 연역 추론은 일반적인 진리로부터 개별적인 진리를 추론하는 것으로 귀납 추론과 반대된다고 할 수 있다. 하지만 이때 연역 추론의 일반적인 원리는 귀납 추론에 의해서 얻어진 것이므로 연역과 귀납은 상호 의존적이라 할 수 있다.

#### (3) 단계

귀납 추론 학습 모형은 학생이 많은 양의 정보를 학습하고 처리하는 데 유용하며 수집한 사례로부터 수학적 개념, 원리, 성질을 발견하기를 요구하는 활동에서 효과적이다. 귀납 추론은 일반적으로 몇 개의 자료를 수집하고 그 자료에서 규칙이나 성질을 찾은 뒤, 그 규칙이나 성질이 그 자료를 포함하는 집합에서 성립하는지 추측하고, 그 추측을 일반화하기 위하여 새로운 자료들로 추측을 검증하는 단계를 거친다(강문봉 외 14인, 2013). 귀납 추론 학습 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동을 살펴보면 [표 2-6]과 같다.

[표 2-6] 귀납 추론 학습 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동

단계	교수·학습 활동
사례 수집 및 관찰·실험하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>문제의 조건에 부합하는 사례 수집하기</li> <li>수집한 사례를 관찰·실험하기</li> </ul>
추측하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>사례로부터 공통된 규칙 또는 성질을 찾아 추측하기</li> <li>추측한 공통된 규칙 또는 성질을 수학적으로 표현(식, 용어 등)하기</li> </ul>
추측 검증하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>추측이 타당한지 다른 사례에서 확인하고 검증하기</li> <li>추측에 대한 반례를 찾아보기</li> <li>추측의 반례를 찾았을 경우 추측을 수정하거나 새로운 사례를 더 수집하여 관찰·실험 단계로 돌아가기</li> </ul>
일반화 및 정당화하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>반례가 없을 경우 검증된 추측을 일반화하여 수학적 개념, 원리, 성질로 형식화하기</li> <li>반례가 없을 경우 추측을 정당화(증명)하기</li> </ul>

#### (4) 적용 시의 유의점

- ① 학생이 항상 자료에 근거하여 추론하게 하고, 주어진 자료를 넘어서는 추론은 옳지 않다는 사실을 지도한다.
- ② 학생이 주어진 자료를 관찰 및 실험하는 과정에서 가설을 설정하고 논리적 추론에 따라 가설을 입증할 수 있도록 지도한다.
- ③ 교사는 학생이 자료를 수집, 분류, 일반화하는 전 과정에서 적절한 발문을 통해 학생의 추론을 이끌어야 한다.

### 라. 문제해결 학습 모형

#### (1) 특징

문제해결 학습 모형은 학생이 문제를 해결하는 과정에서 수학적 지식이나 기능을 활용함으로써 해당 지식을 획득하고, 문제를 해결하는 능력을 갖추는 데 초점을 둔다. 따라서 수학적 지식이나 기능이 반영되고, 학생의 수학적 사고력을 신장시킬 수 있는 문제를 구성하는 것이 중요하다.

#### (2) 배경지식

문제는 정형 문제와 비정형 문제로 분류할 수 있다. 정형 문제는 이미 제시된 알고리즘을 이용하여 해결할 수 있거나 특정한 수를 대입하여 해결할 수 있는 문제 등을 말하며 비정형 문제는 문제를 해결하는 알고리즘이나 방법을 모르는 상태에서 문제해결 전략이나 창의적인 해결 방법을 고안하여 해결해야 하는 문제를 말한다. 문제해결에서의 ‘문제’는 비정형 문제를 의미하는데 구체적인 해결 방법을 쉽게 찾을 수 없기 때문에 여러 단계에 걸친 복잡한 사고가 요구되는 문제를 말한다.

이때, 문제를 해결하기 위해 문제해결 전략을 사용할 수 있다. 문제해결 전략이란 문제해결에 도움이 되는 절차나 해법의 실마리를 얻을 수 있도록 돕는 방책 등을 뜻한다(황혜정 외 5인, 2001). 대표적인 문제해결 전략 몇 가지를 소개하면 다음과 같다(강문봉 외 14인, 2013).

먼저 예상과 확인하기 전략은 문제의 답을 미리 예상해 보고 답이 문제의 조건에 맞는지 확인해 보면서 문제를 해결하는 전략을 말한다. 예상한 답을 넣어 보고 맞지 않으면 또 다른 답을 넣어 보면서 조건에 맞을 때까지 반복하는 시행착오 전략과는 달리 예상과 확인하기 전략은 처음에 예상한 값이 맞지 않을 때 문제의 조건에 맞춰 예상한 값의 크기를 조절하여 예상해 본다는 점에 차이가 있다.

다음으로 규칙성 찾기 전략은 문제에서 주어진 조건을 바탕으로 규칙을 발견하고 이러한 규칙을 이용하여 계산을 확대해 가면서 문제를 해결하는 전략이다. 단순화하기 전략은 문제 상황이 복잡하거나 낯설어서 문제해결 방법을 찾을 수 없을 때, 문제 상황을 보다 간단하고 익숙한 상황으로 바꾸어 단순화된 문제를 해결한 다음, 그 방법을 처음 문제에 적용해 보는 전략이다. 두 전략은 유사해 보이나, 규칙성 찾기는 일련의 사례에서 규칙을 찾는 것에 초점을 두는 반면, 단순화하기는 복잡한 문제를 보다 간단한 문제로 바꾸는 것에 초점을 둔다는 차이점이 있다.

또한 그림 그리기와 표 만들기는 그 자체가 전략이 되기도 하면서 다른 전략의 보조 전략으로 활용되기도 한다. 그림 그리기 전략에서는 문제에서 주어진 조건과 구해야 할 것이 그림에 모두 나타나도록 그려야만 둘 사이의 관계를 파악하는 것이 용이하다. 표 만들기 전략에서는 문제 상황을 잘 나타내 줄 수 있는 표 형태를 먼저 생각하고, 문제에 주어진 정보를 표에 채운 다음 빈칸에 들어갈 수를 생각하면 문제를 좀 더 쉽게 해결할 수 있다.

거꾸로 풀기 전략은 문제 상황의 마지막 결과와 최초의 조건에서 문제해결로 가는 과정이 제시되어 있을 때, 결론으로부터 최초의 조건으로 거꾸로 생각해 감으로써 문제를 해결하는 전략이다.

마지막으로 논리적 추론 전략은 “만약 ~이면 ~이다.”는 형태로 답일 가능성이 있는 모든 경우를 하나씩 점검해 가면서 불가능한 경우를 제거해 가며 문제를 해결하는 전략이다.

문제해결 전략을 익힐 때에는 교사의 적절한 안내를 통해 학생들이 문제를 해결하면서 전략을 하나씩 익히도록 하여 문제 상황과 그에 맞는 문제해결 전략의 특징을 이해할 수 있도록 한다. 학생들이 각각의 문제해결 전략을 경험해 본 후에는 주어진 문제 상황을 해결하는 데 더욱 적합한 문제해결 전략을 스스로 찾고 선택할 수 있는 기회를 제공해야 한다.

### (3) 단계

문제해결 학습 모형은 단순히 답을 찾는 것이 아니라 학생이 답을 이끌어 내는 ‘사고 과정’을 학습하는 데 목적이 있다. 수학 수업에서 문제해결 학습 모형은 주로 폴리아(Pólya, G., 1887~1985)의 문제해결 4단계인 문제의 이해, 계획의 수립, 계획의 실행, 반성을 반영하며 문제해결 학습 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동을 살펴보면 [표 2-7]과 같다.


[표 2-7] 문제해결 학습 모형의 단계 및 단계별 교수·학습 활동

단계	교수·학습 활동
문제 이해하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 문제에서 주어진 조건, 구하고자 하는 것을 확인하기</li> <li>• 문제해결에 필요한 개념, 원리, 법칙을 수집하기</li> </ul>
해결 계획 세우기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 전에 풀어 본 경험이 있는 문제인지 생각해 보기</li> <li>• 문제해결을 위한 전략(거꾸로 풀기, 단순화하기 등) 생각하기</li> <li>• 문제해결의 결과 예상하기</li> </ul>
해결 계획 실행하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 해결 계획에 따라 논리적으로 과제를 해결하기</li> </ul>
반성하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 결과(답)와 해결 과정에 대해 점검하기</li> <li>• 다른 해결 방법이 있는지 생각해 보기</li> <li>• 문제해결 방법을 일반화하고 확장하기</li> <li>• 조건을 변형하여 유사한 문제를 만들거나 원래 문제를 창의적이고 재미있는 문제로 변형하기</li> </ul>




### 3 수학 수업 모형을 적용한 교수·학습 과정안 예시

#### ■ 개념 학습 모형을 적용한 교수·학습 과정안

단원	2. 평면도형	학년 학기	3학년 1학기
차시 주제	직각삼각형을 알아볼까요?	차시	6/10
성취기준	[4수03-09] 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 이해한다.		
학습 목표	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 분류 활동을 통하여 직각삼각형을 알 수 있다.</li> <li>• 여러 가지 직각삼각형을 만들고 그릴 수 있다.</li> <li>• 생활 속에서 직각삼각형을 찾을 수 있다.</li> </ul>		
교과 역량	문제해결 🔍 추론 🗨 정보처리 📊	준비 자료	도형판, 고무줄

흐름	교수·학습 과정	시간(분)	유의점
도입	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 선수 학습 내용 확인 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 지난 시간에 어떤 내용을 배웠는지 떠올려 봅시다.</li> </ul> </li> <li>• 동기 유발 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 엘리베이터 설치된 횡단보도에서 안전하게 길을 건너본 경험이 있나요?</li> </ul> </li> </ul>	5	
범례 제시 및 범례 분류하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 그림에서 여러 가지 삼각형 찾기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 그림에서 여러 가지 삼각형을 찾아보세요.</li> </ul> </li> <li>• 삼각형 분류하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 어떤 기준으로 삼각형을 분류하면 좋을지 이야기해 보세요.</li> <li>- 삼각형에서 직각을 찾아  표시해 보세요.</li> <li>- 직각을 기준으로 삼각형을 분류해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	10	삼각형의 분류 기준을 먼저 생각해 보게 한다.
공통 성질 추상화하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 공통적인 특징 이야기하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 삼각형 다와 삼각형 라는 어떤 공통점이 있는지 이야기해 보세요.</li> <li>- 한 각이 직각인 삼각형의 이름은 무엇일지 이야기해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	8	직각삼각형에는 직각이 항상 한 개인지 궁금해질 경우, 직각이 두 개인 삼각형을 직접 그려 보는 활동을 통해 직각이 두 개인 삼각형은 그릴 수 없다는 것을 직관적으로 이해하게 한다.
개념 정의하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 직각삼각형 정의하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 한 각이 직각인 삼각형을 직각삼각형이라고 합니다.</li> </ul> </li> <li>• (본 차시에서 개념의 속성을 조사하는 단계는 생략함.)</li> </ul>	2	
개념 익히기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 도형판에 직각삼각형 만들기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 도형판에 여러 가지 직각삼각형을 만들어 보세요.</li> <li>- 만든 도형이 직각삼각형인지 확인해 보세요.</li> </ul> </li> <li>• 직각삼각형 그리기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 모눈종이에 주어진 선분을 이용하여 크기가 다른 직각삼각형을 그려 보세요. 그린 도형이 직각삼각형이 맞는지 확인해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	10	도형판과 모눈종이에 나타낸 삼각형이 직각삼각형이 맞는지 짝 또는 모둠원과 확인해 보고, 직각삼각형이 아니면 그 이유를 말하게 한다.
정리 및 평가	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 생활 속에서 직각삼각형 찾기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 비행기 그림에서 직각삼각형을 모두 찾고, 찾은 도형이 직각삼각형이 맞는지 확인해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	5	



■ 원리 탐구 학습 모형을 적용한 교수·학습 과정안

단원	2. 나눗셈	학년 학기	3학년 2학기
차시 주제	나머지가 있는 (몇십몇) ÷ (몇)을 구해 볼까요?(1)	차시	6/11
성취기준	[4수01-06] 나누는 수가 한 자리 수인 나눗셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있으며, 나눗셈에서 몫과 나머지의 의미를 안다.		
학습 목표	<ul style="list-style-type: none"> <li>나머지가 있고 내림이 없는 (몇십몇) ÷ (몇)의 계산 원리를 알고 계산 방법을 말할 수 있다.</li> <li>나머지가 있고 내림이 없는 (몇십몇) ÷ (몇)의 몫과 나머지를 구할 수 있다.</li> </ul>		
교과 역량	  		

흐름	교수·학습 과정	시간(분)	유의점
도입	<ul style="list-style-type: none"> <li>선수 학습 내용 확인 <ul style="list-style-type: none"> <li>지난 시간에 어떤 내용을 배웠는지 떠올려 봅시다.</li> </ul> </li> <li>동기 유발 <ul style="list-style-type: none"> <li>누군가에게 선물하기 위해 종이꽃을 만들어 본 경험이 있나요?</li> </ul> </li> </ul>	5	
새로운 문제 상황 제시하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>만들 수 있는 종이꽃의 수와 남는 한지의 수를 구하는 방법 생각해 보기 <ul style="list-style-type: none"> <li>만들 수 있는 종이꽃의 수와 남는 한지의 수를 구하는 식을 써 보세요.</li> <li>만들 수 있는 종이꽃의 수와 남는 한지의 수를 어떻게 구할 수 있을까요?</li> </ul> </li> </ul>	5	나머지가 없는 나눗셈과의 차이점을 인식하게 한다.
수학적 원리의 필요성 인식하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>남는 한지의 수를 나타내는 방법 생각해 보기 <ul style="list-style-type: none"> <li>20은 4로 나누어지지만, 5는 4로 나누어지지 않을 때 어떻게 해야 할까요?</li> <li>남는 한지의 수를 어떻게 나타내야 할까요?</li> </ul> </li> </ul>	5	학생이 문제 상황에서 남는 수가 있다는 것을 인지하게 하여 인지적 갈등을 경험할 수 있게 한다.
수학적 원리가 내재된 조작 활동하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>25 ÷ 4를 수 카드로 계산하는 방법 알아보기 <ul style="list-style-type: none"> <li>카드 25장을 4장씩 ○로 묶어 보세요.</li> <li>카드가 4장씩 몇 묶음이 되고, 몇 장이 남는지 이야기해 보세요.</li> <li>수 카드로 계산하는 방법을 이야기해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	5	
형식화하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>25 ÷ 4를 계산하는 방법 알아보기 <ul style="list-style-type: none"> <li>수 카드 활동을 바탕으로 25 ÷ 4를 세로셈으로 계산하는 방법을 알아보세요.</li> <li>25를 4로 나누면 몫이 6이고 1이 남습니다. 25 ÷ 4 = 6...1 이때 1을 나머지라고 합니다. 나머지는 나누는 수보다 항상 작습니다. 24 ÷ 4 = 6처럼 나머지가 0일 때, 나누어떨어진다고 합니다.</li> </ul> </li> </ul>	8	나머지 자리에 1이나 0이 올 수 있음을 파악하게 하여 0도 나머지임을 이해하게 한다.
익히기 및 적용하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>나머지가 있고 내림이 없는 (몇십몇) ÷ (몇) 계산하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>나눗셈을 하여 몫과 나머지를 구해 보세요.</li> </ul> </li> <li>나누는 수와 나머지의 관계 알아보기 <ul style="list-style-type: none"> <li>나눗셈의 몫과 나머지를 구하고, 나누는 수와 나머지의 관계를 이야기해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	5	
정리 및 평가	<ul style="list-style-type: none"> <li>재미있는 수학 <ul style="list-style-type: none"> <li>주사위의 눈의 수가 나머지와 같은 나눗셈을 찾아 색칠해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	7	






■ 귀납 추론 학습 모형을 적용한 교수·학습 과정안

단원	2. 각도	학년 학기	4학년 1학기
차시 주제	삼각형의 세 각의 크기의 합을 알아볼까요?	차시	7/10
성취기준	[4수03-25] 여러 가지 방법으로 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 추론하고, 자신의 추론 과정을 설명할 수 있다.		
학습 목표	• 여러 가지 방법으로 삼각형의 세 각의 크기의 합을 추론하고 자신의 추론 과정을 설명할 수 있다.		
교과 역량	 		

흐름	교수·학습 과정	시간(분)	유의점
도입	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 선수 학습 내용 확인 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 지난 시간에 어떤 내용을 배웠는지 떠올려 봅시다.</li> </ul> </li> <li>• 동기 유발 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 삼각형의 세 각의 크기의 합은 어떻게 구할 수 있을까요?</li> </ul> </li> </ul>	5	
사례 수집 및 관찰·실험하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 삼각형의 세 각의 크기를 재어 합 구하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 주어진 삼각형과 다른 삼각형을 그리고, 각도기로 두 삼각형의 세 각의 크기를 각각 재어 합을 구해 보세요.</li> </ul> </li> <li>• 여러 가지 방법으로 삼각형의 세 각의 크기의 합 알아보기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 잘라서 이어 붙이기, 접어 보기, 본뜨기 방법 중에서 한 가지를 선택하여 삼각형의 세 각의 크기의 합을 구해 보세요.</li> <li>- 나와 다른 방법을 선택한 친구와 삼각형의 세 각의 크기의 합을 비교해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	10	학생들이 다양한 사례를 비교하는 과정을 통해 삼각형의 세 각의 크기의 합에 대한 공통된 성질을 찾을 수 있도록 하고, 학생 스스로 방법을 생각해 볼 수 있도록 독려한다.
추측하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 삼각형의 세 각의 크기의 합에 대한 규칙 표현하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 삼각형의 세 각의 크기의 합에는 공통된 규칙이 있나요?</li> <li>- 삼각형의 세 각의 크기의 합은 <math>180^\circ</math>입니다.</li> </ul> </li> </ul>	5	학생들이 찾은 규칙에 대해서 자신만의 방법으로 표현하는 것도 모두 허용한다.
추측 검증하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 삼각형의 한 각의 크기 구하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 삼각형의 세 각의 크기의 합이 <math>180^\circ</math>인 것을 이용하여 삼각형의 한 각의 크기를 구해 보세요.</li> </ul> </li> <li>• 디지털 기기로 삼각형의 세 각의 크기의 합을 확인하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 알지오매스 키즈로 여러 가지 모양의 삼각형을 그리고 세 각의 크기를 각각 잴 후, 계산기를 이용하여 세 각의 크기의 합을 구해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	12	
일반화 및 정당화하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 삼각형의 세 각의 크기의 합에 대한 규칙 일반화하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 삼각형의 세 각의 크기의 합은 얼마인가요?</li> <li>- 모든 삼각형의 세 각의 크기의 합은 <math>180^\circ</math>라고 말할 수 있나요? 그 이유는 무엇인가요?</li> </ul> </li> </ul>	3	모든 삼각형에 일반화할 수 있는 이유를 설명하게 한다.
정리 및 평가	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 배운 내용 정리하기 <ul style="list-style-type: none"> <li>- 오늘 배운 내용에 대하여 친구와 함께 서로 질문하고 답해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	5	

■ 문제해결 학습 모형을 적용한 교수·학습 과정안

단원	5. 길이와 시간	학년 학기	3학년 1학기
차시 주제	누구일까요?	차시	9/10
성취기준	[4수03-13] 1분과 1초의 관계를 이해하고, 초 단위까지 시각을 읽을 수 있다. [4수03-14] 실생활 문제 상황과 연결하여 초 단위까지의 시간의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다. [4수03-16] 길이 단위 1 mm와 1 km를 알고, 이를 이용하여 길이를 측정하고 어림하여 수학의 유용성을 인식할 수 있다.		
학습 목표	<ul style="list-style-type: none"> <li>알맞은 길이 단위를 선택할 수 있다.</li> <li>시간의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.</li> <li>주어진 조건을 확인하여 문제를 해결할 수 있다.</li> </ul>		
교과 역량	  		

흐름	교수·학습 과정	시간(분)	유의점
도입	<ul style="list-style-type: none"> <li>선수 학습 내용 확인               <ul style="list-style-type: none"> <li>지난 시간에 어떤 내용을 배웠는지 떠올려 봅시다.</li> </ul> </li> </ul>	5	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>동기 유발               <ul style="list-style-type: none"> <li>단서들을 활용하여 문제를 해결해 본 경험이 있나요?</li> </ul> </li> </ul>		
문제 이해하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>발 길이와 시간의 흐름별로 일어난 일들 살펴보기               <ul style="list-style-type: none"> <li>구하려고 하는 것은 무엇인지 이야기해 보세요.</li> <li>문제를 읽고 알고 있는 것은 무엇인지 이야기해 보세요.</li> <li>현우가 산책을 한 시간을 구해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	5	
문제해결 계획 세우기	<ul style="list-style-type: none"> <li>문제해결 전략 생각하기               <ul style="list-style-type: none"> <li>문제를 해결하기 위해서 주어진 조건 중 어떤 것을 확인해야 하나요?</li> <li>발 길이와 시간이 같이 제시되어 있을 때, 문제를 어떻게 해결할 수 있을지 이야기해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	5	
문제해결 계획 실행하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>조건 관찰과 대화 내용 이해를 통해 자리를 정리한 친구 찾기               <ul style="list-style-type: none"> <li>발 길이와 현우가 산책한 시간 중 어떤 단서를 먼저 사용할 것인가요?</li> <li>발 길이 단서를 먼저 사용하면 4명의 친구 중 몇 명의 친구들이 남나요?</li> <li>2명의 친구 중 자리를 정리한 친구를 찾으려면 어떻게 해야 하나요?</li> <li>발 길이 단서에 맞는 2명 중 시간 단서도 맞는 친구는 누구인가요?</li> </ul> </li> </ul>	10	문제에 제시된 여러 가지 조건 중에서 어떤 것을 먼저 사용하는 것이 유리한지 생각해 보게 한다.
반성하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>단서를 변형하여 유사한 문제를 만들기               <ul style="list-style-type: none"> <li>정리한 친구의 발 길이 단서를 바꿔 점심 먹은 자리를 다른 친구가 정리한 것으로 문제를 만들어 보세요.</li> <li>단서를 바꾸었더니 자리를 정리한 친구가 누가 되었는지 이야기해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	10	시간 단서를 바꿔 문제를 만드는 경우도 허용하고, 어떻게 단서를 바꾸면 자리를 정리한 친구가 한 명이 될 수 있는지 생각해 보게 한다.
정리 및 평가	<ul style="list-style-type: none"> <li>배운 내용 정리하기               <ul style="list-style-type: none"> <li>오늘 배운 내용을 친구와 함께 질문하고 답해 보세요.</li> </ul> </li> </ul>	5	

### ③ 초등학교 수학과 평가

#### 1 2022 개정 수학과 교육과정의 평가 방향

교육 평가란 교육과정과 교수 프로그램에 비추어 교육 목표가 얼마만큼 달성되었는가를 판단하는 행위(Tyler, 1949; 성태제, 2019에서 재인용)를 말한다. 교육과정과 교수·학습 그리고 평가는 유기적으로 연결되어 있으며 수학과 교육과정과 교수 방법의 변화에 따라 평가의 방법도 바뀌어야 한다. 2022 개정 수학과 교육과정에서는 수학과 교수·학습 방법과 관련하여 평가의 방향을 9가지로 제시하고 있으며 그 내용은 다음과 같다(교육부, 2022).

##### (1) 평가의 방향

- (가) 학생의 수학 학습에 대한 정보를 수집·활용하여 학생의 주도적 학습과 성장을 지원하고 교사의 수업 개선을 돕도록 지속적으로 평가를 실시한다.
- (나) 수학과 교육과정에 제시된 성격, 목표, 내용 체계, 성취기준, 교수·학습과 일관성을 가지도록 평가를 실시한다.
- (다) 학생의 수학 학습을 돕기 위해 수업과 평가를 통합하여 과정을 중시하는 평가를 실시한다.
- (라) 수학 내용 체계의 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 학습 결과뿐 아니라 학습 과정에서 균형 있게 평가한다.
- (마) 학생이 평가 과정에 적극적으로 참여하고 스스로 설정한 수학 학습 목표에 대한 달성 여부를 점검할 수 있게 한다.
- (바) 학생의 사회·문화적 배경, 신체 특성 등이 불리하게 작용하지 않도록 평가를 실시하고, 학생의 사전 지식, 수학에 대한 흥미, 학습 유형, 학습 수준을 고려하여 평가 목적, 교수·학습 내용 및 방법에 따라 다양한 평가 방법을 적용한다.
- (사) 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 활용하여 수학 학습 과정과 결과에 대한 구체적인 정보를 바탕으로 학생의 특성과 학습 결손을 파악하고 개별적 지원 방안을 마련한다.
- (아) 온라인 수학 수업에서 평가를 할 때 학습 환경 등의 외적 요소가 수학 학습 과정과 평가 결과에 영향을 미치지 않도록 한다.
- (자) 평가 절차를 개방적이고 공정하게 시행하고 학생의 수학 학습에 대한 의미 있는 정보를 학생, 학부모에게 제공한다.

수학과 평가는 학생들의 성취 결과에 대한 자료의 수집보다는 학생들의 성장을 효과적으로 지원하고 교사의 수업을 개선하는 것을 목적으로 하고 있다. 따라서 평가는 교육과정과 수업이 통합적으로 이루어지고, 학생들의 개별 성장을 지원하며, 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가가 되도록 한다. 또 그 결과를 학생, 학부모, 교사에게 환류하여 학생의 학습 개선을 도울 수 있어야 한다.

이러한 내용을 중심으로 시사점을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 과정을 중시하는 평가는 교육과정, 수업, 평가의 일체화를 추구한다. 교사는 교육과정의 성취기준을 분석하고 수업을 설계할 때, 활동을 구상하고 평가 도구를 개발하여 학생들의 반응을 예상하고 그에 따른 피드백을 계획한다. 이런 측면에서 교사가 수업을 설계하고 실행하는 과정에서 행하는 모든 활동이 평가 과정이 될 수 있고, 교사가 관찰하는 모든 내용이 평가 대상이 될 수 있으며 수업은 평가에 대한 피드백 중심으로 이루어진다고 보면 수업과 평가를 명확하게 구분하기 어렵다.

둘째, 2022 개정 교육과정에서는 2015 개정 교육과정에서 제시한 과정을 중시하는 평가보다 학생들의 지속적, 개별적, 학생 주도적 성장 지원의 측면을 좀 더 강조하고 있다. 교사는 수업 과정 중 평가 결과를 살펴 학생에게 적절하게 피드백 함으로써 평가 자체가 학생의 개별적 성장을 지원하는 과정이 되도록 해야 한다. 이를 이해 관련 성취기준에 도달하도록 하되, 학생들이 스스로 설정한 목표에 도달한 정도를 점검하도록 하고 학생들의 사전 지식, 수학에 대한 흥미, 학습 수준을

고려하여 학생의 현재 수준에서 가장 적절한 방향으로 평가 목적과 방법을 적용할 필요가 있다.

셋째, 수학에 관한 다양한 측면을 평가하기 위해 다양한 평가 유형과 방법을 활용해야 한다. 수학과 평가는 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 학습 결과와 과정 중에 평가해야 한다. 이를 위해 진단평가, 형성평가, 총괄평가뿐 아니라 지필, 프로젝트, 포트폴리오, 관찰, 면담, 구술, 자기, 동료 평가 등 다양한 평가 유형을 활용하고 계산기, 컴퓨터, 다양한 교구 등을 활용하여 학생들의 역량을 다각적으로 평가하도록 한다. 특히 온라인 수업 평가는 평가 환경에 유의하도록 한다.

마지막으로 평가 결과의 환류가 잘 이루어지도록 해야 한다. 평가 결과의 환류가 학생, 학부모의 입장에서는 자신의 학습 실태를 파악하고 교사와 함께 부족한 부분의 학습 계획을 세우는 데 근거가 되는 자료를 제공하며 교사의 입장에서는 학생의 요구를 파악하고 교수·학습의 개선에 정보를 제공함으로써 교사의 전문성 향상을 위한 촉매가 될 수 있다. 이 두 측면은 서로 연결되며 최종적으로 학습자의 성장과 발달을 촉진하는 방향으로 나아가야 한다.

## 2 2022 개정 수학과 교육과정의 평가 방법

### (2) 평가 방법

(가) 수학 수업과 연계하여 과정을 중시하는 평가를 실시할 때는 다음 사항을 고려한다.

- ① 성취기준을 중심으로 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도 범주를 평가 요소로 구체화한다.
- ② 교수·학습과 연계하여 적절한 평가 도구와 준거를 개발하고 평가를 실시한다.
- ③ 평가 결과에 기반하여 학생의 학습 정보 및 수행 과정을 학생과 학부모에게 환류한다.

(나) 수학 교과 역량을 평가할 때는 다음 사항을 고려한다.

- ① 문제해결 역량의 평가는 수학의 개념, 원리, 법칙을 문제 상황에 적절히 활용하는지, 주어진 조건과 정보를 분석하고 적절한 해결 전략을 탐색하여 해결하는지, 문제해결 과정을 돌아보며 절차에 따라 타당하게 결과를 얻어내고 이를 반성하는지, 적극적이고 자신감 있게 문제해결에 참여하는지, 적절한 방법을 찾기 위해 끈기 있게 도전하는지 등을 고려한다.
- ② 추론 역량의 평가는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하는지, 논리적으로 절차를 수행하는지, 수학적 지식을 다양한 방법으로 탐구하는지, 관찰에 근거하여 추측하고 일반화를 할 수 있는지, 추측의 근거를 제시하는지, 타당한 정당화를 하는지, 수학에 대한 흥미와 관심을 갖는지, 체계적으로 사고하려는 성향이 있는지, 수학적 증거와 논리적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 갖는지 등을 고려한다.
- ③ 의사소통 역량의 평가는 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등 수학적 표현을 이해하고 정확하게 사용하는지, 적절한 수학적 표현을 선택할 수 있는지, 수학적 표현 간에 변환을 할 수 있는지, 수학적 아이디어나 수학 학습 과정 및 결과에 대해 표현하고 다른 사람의 견해를 이해하는지, 수학적 표현의 편리함을 인식하는지, 타인을 배려하고 의견을 존중하는지 등을 고려한다.
- ④ 연결 역량의 평가는 영역이나 학년(군) 내용 사이에서 개념, 원리, 법칙을 적절하게 관련지어 이해하는지, 수학의 개념, 원리, 법칙을 연계하여 새로운 지식을 생성할 수 있는지, 수학을 실생활이나 타 교과의 지식, 기능, 경험에 적용할 수 있는지, 실생활이나 타 교과의 지식, 기능, 경험을 수학적으로 해석할 수 있는지, 수학을 바탕으로 창의적으로 관련성을 찾을 수 있는지, 수학의 유용성을 인식하는지 등을 고려한다.
- ⑤ 정보처리 역량의 평가는 자료와 정보를 목적에 맞게 수집하고 변환하고 정리하는지, 자료를 바탕으로 도출한 결론이 적절한지, 교구나 공학 도구를 적절하게 활용하는지, 수학적 근거를 바탕으로 합리적으로 의사결정하는 태도를 갖는지 등을 고려한다.

(다) 학생의 수학 학습 과정과 결과는 다양한 평가 방안을 사용하여 양적 또는 질적으로 평가한다.

- ① 지필평가는 수학 내용 체계의 지식·이해, 과정·기능을 평가하는 데 활용할 수 있고, 선택형, 단답형, 서·논술형 등의 다양한 문항 유형을 사용할 수 있다.
- ② 프로젝트 평가는 학생 스스로 특정 주제나 과제를 탐구하고 해결하기 위해 계획을 수립하고 수행하는 과정과 그 결과물을 평가하는 방안으로, 수학 내용 체계의 세 범주를 종합적으로 평가할 때 활용할 수 있다.
- ③ 포트폴리오 평가는 학생의 성장에 대한 정보를 얻기 위해 수학 학습 수행과 그 결과물을 일정 기간 수집하여 평가하는 방안으로, 수학 교과 역량의 발달을 종합적으로 평가할 때 활용할 수 있다.

- ④ 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가는 학생 개인 및 소집단을 관찰, 학생과의 질의응답, 학생의 발표를 통해 평가하는 방안으로, 학생의 사고 방법, 수행 과정, 수학 내용 체계의 가치·태도 등을 평가할 때 활용할 수 있다.
  - ⑤ 자기 평가는 학생 스스로 자신의 학습 과정과 결과를 평가하는 방안으로, 수학 내용의 이해와 수행 과정, 문제해결과 추론 과정의 반성, 자신의 생각 표현, 수학 내용 체계의 가치·태도 등을 평가할 때 활용할 수 있다.
  - ⑥ 동료 평가는 동료 학생들이 상대방을 서로 평가하는 방안으로, 협력 학습 상황에서 학생 개개인의 역할 수행이나 집단 활동의 기여를 평가할 때 활용할 수 있다.
- (라) 교구나 공학 도구를 활용하여 평가할 때는 다음 사항을 고려한다.
- ① 성취기준의 도달 여부를 판단하는 데 교구나 공학 도구의 사용이 효과적인 경우 이를 활용한 평가를 실시할 수 있다.
  - ② 교구나 공학 도구를 활용하여 평가할 때는 교구나 공학 도구의 기능 및 조작이 아닌 수학 내용의 탐구 과정을 평가한다.
- (마) 온라인 수학 교수·학습 환경에서 평가할 때는 다음 사항을 고려한다.
- ① 온라인 수학 학습에서는 학생의 활동에 근거한 구체적인 자료를 사용하여 평가한다.
  - ② 온라인 학습 플랫폼이나 학습 관리 시스템을 이용하여 학생의 수행 과정을 관찰하고 개별 맞춤형으로 환류할 수 있다.
  - ③ 학생의 접속 환경 미비로 인한 불참 시 기회 부여 등에 대해 방안을 마련하고 형평성의 문제가 제기되지 않도록 사전에 안내한다.

위의 내용을 중심으로 2022 개정 수학과 교육과정의 평가 방법을 살펴보면 다음과 같다.

(가)에서는 2015 개정 수학과 교육과정과 마찬가지로 과정을 중시하는 평가를 강조하고 있다. 과정을 중시하는 평가는 학생들의 평가 결과를 점수화하여 등급 매기기로 활용하는 것이 아니라 학생의 성장을 지원하는 도구로서의 역할을 중시한다. 과정을 중시하는 평가를 실시할 때는 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도 범주를 골고루 평가하고, 적절한 평가 도구와 준거를 개발하여 활용하며, 결과를 학생과 학부모에게 제공한다.

(나)에서는 수학과 교과 역량 평가에 대해서 제시하고 있다. 2022 개정 교육과정에서는 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리의 5가지 역량을 어떻게 평가할 것인가에 대해서 2015 개정 교육과정에서보다 더욱 구체적으로 제시하였는데, 이는 학교 현장에서 수학 교과 역량이 무엇인지, 어떻게 기르게 할 것인지와 더불어 어떻게 평가할 것인지에 대한 어려움을 감안하여 이에 도움을 주고자 한 것으로 보인다.

(다)에서는 지필 평가, 프로젝트 평가, 포트폴리오 평가, 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가, 자기 평가, 동료 평가 등 다양한 평가 방법을 제시하고, 각각의 평가 방법이 구체적으로 무엇을 평가하는 데 적절한지에 대해서 제시하고 있다.

(라)와 (마)에서는 교구 및 공학 도구를 활용한 평가와 온라인 환경에서 평가할 때의 고려 사항에 대해서 제시하고 있다.

2022 개정 교육과정에서 제시하는 평가 방법을 중심으로 ‘성장을 지원하고 과정을 중시하는 평가’, ‘수학 교과 역량 평가’, ‘다양한 평가 방법’을 살펴보면 다음과 같다.

## 가. 성장을 지원하고 과정을 중시하는 평가

### (1) 과정을 중시하는 평가의 필요성

평가 관점이 학습 결과에 대한 평가(assessment of learning)에서 학습을 위한 평가(assessment for learning) 또는 학습으로서의 평가(assessment as learning)로 전환되고 있다(교육부·한국교육과정평가원, 2017; Sue Swaffield, 2011). 이는 과거 학생 학습 결과를 점수화하여 줄 세우기 식의 평가를 지양하고, 수업을 통해 학생들의 배움을 확인하고 보충하기 위



한 통로로서의 평가, 즉 학생들의 성장을 지원하기 위한, 과정을 중시하는 평가를 추구한다는 의미이다. 이와 같은 과정 중심의 평가가 중요시되는 이유는 첫째, 교사가 잘 지도했다고 해서 학생이 잘 배웠다고 단정할 수 없으므로 교사의 수업과 동시에 학생들이 잘 성장하고 있는지 수시로 평가하는 것이 필요하기 때문이다. 둘째, 지식 암기 위주가 아닌 다양한 역량을 기르는 수업을 하고 이를 평가하기 위해서는 학습 활동의 결과뿐 아니라 다양한 활동 과정 중 학생들의 반응을 평가하는 것이 필요하기 때문이다. 셋째, 학생 주도적 학습을 통한 성장을 지원하기 위해서는 학생들의 수준과 흥미를 고려하여 평가 목표를 설정할 뿐 아니라 학생들의 과정 중 얻어진 평가 결과에 대해 늦지 않은 시기에 학생에게 적합하게 피드백하는 것이 필요하기 때문이다. 마지막으로 수시로 교사 자신의 수업을 성찰하고 수업의 방향을 수정함으로써 학생들에게 배움과 성장이 잘 이루어질 수 있도록 환류해야 하는데 이러한 의미를 담은 것이 과정을 중시하는 평가이기 때문이다.

## (2) 과정을 중시하는 평가의 의미

이경화 외 6인(2016)에 의하면 과정을 중시하는 평가란 ‘수업과 연동된 평가를 시행하고 그 결과를 교수·학습에 반영함으로써 학생의 수학 학습을 돕는 평가’를 의미한다. 과정을 중시하는 평가는 기존의 평가가 지닌 한계점을 극복하고 최근 교육 평가에서 지향하는 교수·학습과 평가의 상호 작용, 그리고 평가의 주요 측면이 교육 현장에 실현될 수 있도록 하는 데 목적을 둔 평가이다. 즉 평가의 목적은 학생의 학습을 돕는 것이므로 수업의 결과가 아닌 수업 중 나타난 학생의 학습 과정이 평가 대상이어야 하며 그 결과를 학생에게 안내함과 동시에 수업에 반영함으로써 학생의 더 나은 학습을 모색하는 것이다.

과정을 중시하는 평가는 평가가 가진 원래의 기능에 충실하고자 하는 의미에서 기존 결과를 중시하는 평가에 대비되는 관점으로 나온 평가의 방향이자 관점이다. 이경화 외 6인(2016)은 결과를 중시하는 평가와 과정을 중시하는 평가의 특징을 [표 2-10]과 같이 제시하고 있다.

[표 2-10] 결과를 중시하는 평가와 과정을 중시하는 평가의 특징 비교

결과를 중시하는 평가	범주	과정을 중시하는 평가
총괄적 평가	평가 목적	형성적 평가
학습의 평가	학습과의 관계	학습을 위한 평가, 학습으로서의 평가
성취기준과 관련된 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해 및 적용 능력	평가 내용	성취기준과 관련된 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해 및 적용 능력, 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리의 교과 역량
지필 평가	평가 방법	지필 평가, 프로젝트 평가, 포트폴리오 평가, 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가, 자기 평가, 동료 평가
수업 후 일회적 평가	평가 시기	수업 중 지속적 평가
객관적이고 표준화된 양적 정보	수집된 정보	비형식적인 질적 정보
교사	평가 주체	교사, 학생(자기, 동료)
미래의 학생에게 더 많은 혜택 제공	혜택의 분배	미래 학생뿐만 아니라 현재의 학생에게 많은 혜택 제공
즉각적이지 않고 일반적임	피드백	즉각적이고 구체적임



[표 2-10]의 내용을 토대로 과정을 중시하는 평가를 살펴보면 첫째, 평가 목적의 관점에서 과정을 중시하는 평가는 학생들의 서열화나 성취 정도를 보고하기보다는 학생들의 학습을 돕기 위해 시행된다. 과정을 중시하는 평가는 학생들의 학습에 대한 증거를 수집하여 피드백을 제공하고 교수·학습 향상을 이끄는 평가이다. 평가를 통해 얻어진 결과에 기초하여 학생들에게 즉각적이고 실제적인 피드백을 가능한 많이 제공함으로써 평가가 학생의 학습에 기여하도록 한다.

둘째, 평가 시기의 측면에서 과정을 중시하는 평가는 수업 전과 수업 중에 이루어지는 일련의 교사의 활동을 의미한다. 이는 평가가 곧 수업이고 수업은 곧 평가라는, 즉 평가와 수업이 분리된 것이 아니라 통합된 것으로 보는 관점을 반영한다. 따라서 평가는 수업 후 일회적으로 이루어지는 것이 아니라 수업 중에 지속적으로 이루어진다. 또한 지필 형태뿐만 아니라 프로젝트 평가, 포트폴리오 평가, 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가, 자기 평가, 동료 평가 등과 같이 학생들의 학습에 대한 정보를 수집할 수 있는 것이 평가의 방법이 될 수 있으며 수집된 정보 역시 비형식적인 질적 정보가 대부분이다. 하지만 수업 후에도 과정을 중시하는 평가는 가능하다. 학생의 수행 과정에 대한 기록이 있다면 그것을 토대로 학습 과정을 평가할 수 있기 때문이다.

셋째, 평가 내용적인 측면에서 과정을 중시하는 평가는 지필 형태에서 주로 평가할 수 있는 성취 기준과 관련된 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해 및 적용 능력 외에 교수·학습 상황에서 관찰 가능한 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리의 교과 역량 등을 평가한다. 이에 대한 평가 및 피드백은 즉각적이며 구체적이다.

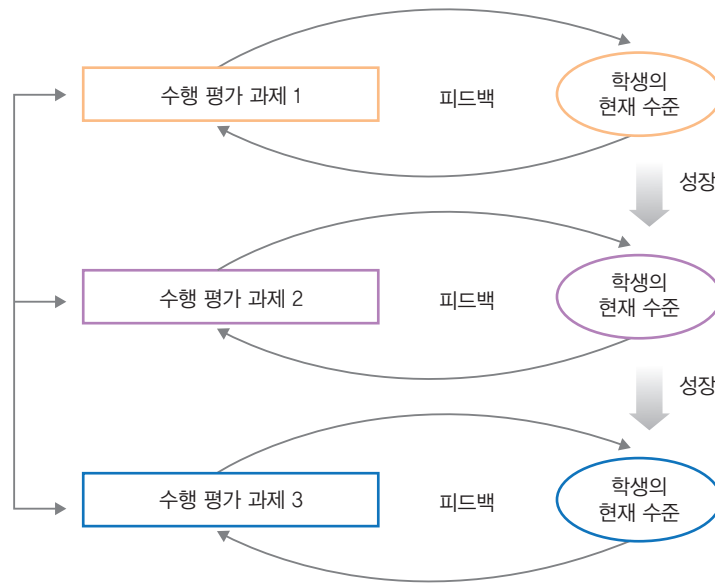
한편 일부에서는 과정을 중시하는 평가가 강조됨에 따라 결과를 중시하는 평가는 나쁜 평가로 인식하는 경향이 있다. 과정을 중시하는 평가와 결과를 중시하는 평가가 의미상으로는 상반되는 면이 있지만 실제 학생 평가에서는 두 평가 관점이 모두 중요하다. 과거 결과를 중시하는 평가가 학생의 성장이나 수업의 향상을 위한다기보다는 학생들에게 성적을 주기 위한 도구로만 활용되었기 때문에 나쁜 평가라는 인식이 있으나 결과를 중시하는 평가가 무조건 나쁜 것은 아니다. 과정을 중시하는 평가는 학생의 학습 과정에서 학생들의 오개념(誤概念)이나 난개념(難概念)을 파악하고 수업 중에 바로 피드백해 주는 활동인데 이러한 과정은 최종적으로 학생들이 성취기준에 도달하는 것을 목표로 한다. 따라서 최종 성취기준에 도달했는지 확인하는 과정이 필요한데 이것이 바로 결과를 중시하는 평가이다. 과정을 중시하는 평가와 결과를 중시하는 평가는 시기와 목적이 다를 뿐 상호 보완적인 측면에서 모두 의미 있는 평가라고 할 수 있다.

### (3) 과정을 중시하는 평가에서의 피드백

과정을 중시하는 평가는 학생들의 성취도를 파악하는 것에서 끝나는 것이 아니라 수업 과정 중 학생들의 변화 정도를 파악하고 이에 맞는 피드백의 제공을 포함한다. 피드백은 시기에 따라 즉각적 피드백과 지연적 피드백이 있고 형식에 따라 형식적 피드백과 비형식적 피드백이 있다(김성숙 외 3인, 2015). 과정을 중시하는 평가에서는 즉각적인 피드백이 그 목적에 좀 더 부합하지만 과정을 중시하는 평가를 좀 더 큰 의미로 보자면 지연적인 피드백도 필요하다. 한편 형식적 피드백은 교사가 평가를 계획할 때 학생들의 반응과 이에 대한 피드백을 예상하여 제공하는 것이고, 비형식적 피드백은 상황에 따라 미리 계획하지 않고 학생에게서 관찰되는 반응에 기초하여 즉각적으로 제공되는 피드백이다. 과정을 중시하는 평가를 계획할 때 평가 과제에 대해서 학생들의 반응을 예상하고 피드백을 계획하지만 예상한 범위를 벗어나서 관찰되는 학생들의 반응에 대해서는 비형식적인 피드백이 필요하며 이러한 피드백은 교사의 전문성에 기반한다(강현영 외 6인, 2018).

한편, 과정을 중시하는 평가를 하기 위해서는 학생의 수행 과정에 대하여 상시 관찰을 하고, 학

생의 학습과 성장을 돕는 데 필요한 내용을 선별하여 기록할 필요가 있다. 피드백은 학생들에게 현재 수준에 대한 정보를 제공하고, 도달해야 할 수준과의 차이를 줄이기 위한 방안을 알려 줌으로써 학생의 학습과 성장을 지원하기 위해 실시한다. 이러한 정보를 바탕으로 교사의 수업과 평가의 질을 개선할 수 있으며, 이 또한 궁극적으로 학생의 학습과 성장을 지원하게 된다. 따라서 학생의 종합적인 성장을 지원하기 위해서는 인지적 측면뿐 아니라 정의적 측면이나 핵심 역량과 같은 다면적인 특성에 대한 피드백을 하는 것이 필요하다(교육부·교육과정평가원, 2017).



[그림 2-13] 과정을 중시하는 피드백 제공(교육부·한국교육과정평가원, 2017)

#### 나. 수학 교과 역량 평가

수학 교과 역량의 함양은 수학과와 최종 목표라 할 수 있다. 2022 개정 수학과 교육과정에서는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학의 가치를 인식하며 바람직한 수학적 태도를 길러 수학 교과 역량을 함양하는 것을 목표로 제시하고 있고 하위에 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리 역량의 함양을 세부 목표로 제시하고 있다(교육부, 2022). 이러한 역량의 함양은 수업에서만 배우고 익히는 것이 아니라 수업과 통합된 평가에서도 함께 행해져야 한다. 학생들이 어떤 교과 역량이 부족한지 정확히 측정할 필요가 있으며 평가 결과를 토대로 피드백하여 학생들의 성장을 도모해야 한다. 이에 수학 및 수학익힘에 제시된 과제를 중심으로 어떻게 수학 교과 역량을 평가할 수 있을지 살펴보고자 한다. 하나의 평가 과제를 수행하는 과정에서 여러 역량이 복합적으로 평가될 수 있지만 대표적인 역량을 중심으로 살펴보면 다음과 같다.

##### (1) 문제해결 역량의 평가

문제해결 역량의 평가는 수학의 개념, 원리, 법칙을 문제 상황에 적절히 활용하는지, 주어진 조건과 정보를 분석하고 적절한 해결 전략을 탐색하여 해결하는지, 문제해결 과정을 돌아보며 절차에 따라 타당하게 결과를 얻어 내고 이를 반성하는지, 적극적이고 자신감 있게 문제해결에 참여하는지, 적절한 방법을 찾기 위해 끈기 있게 도전하는지 등을 고려한다(교육부, 2022). 예를 들어 [그림 2-14]와 같이 아기 돼지 삼 형제가 여러 가지 재료를 똑같이 나누어 집을 짓는 평가 과제의 경우

3으로 똑같이 나눈다는 나눗셈의 개념, 나눗셈의 계산 원리를 문제 상황에 적절히 활용할 수 있는지, 흙, 모래, 페인트 등 재료에 대한 정보와 여러 가지 재료 중 4가지를 골라 집을 짓는다는 조건을 분석하여 식 만들기 전략을 사용하여 문제를 해결할 수 있는지, 문제를 해결하는 과정 및 결과를 되돌아보고 타당하게 결과를 얻어 내는지 등을 평가할 수 있다. 또 정의적인 측면에서 문제해결에 적극적으로 참여하는지, 문제를 어떻게 해결할 수 있을지를 궁리하면서 끈기 있게 도전하는지 등을 평가할 수 있다.

## (2) 추론 역량의 평가

추론 역량의 평가는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 절차를 수행하는지, 수학적 지식을 다양한 방법으로 탐구하는지, 관찰에 근거하여 추측하고 일반화할 수 있는지, 추측의 근거를 제시하는지, 타당한 정당화를 하는지, 수학에 대한 흥미와 관심을 갖는지, 체계적으로 사고하려는 성향이 있는지, 수학적 증거와 논리적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 갖는지 등을 고려한다(교육부, 2022). 예를 들어 [그림 2-15]와 같이 네잎클로버 모양의 열쇠고리를 만드는 데 필요한 비즈의 수를 구하는 평가 과제의 경우 네잎클로버 모양이 어떻게 배열되었는지를 관찰하고 있을 한 장 만드는 데 필요한 비즈의 수를 구해서 ‘여기에 4를 곱하면 될까?’라는 추측과 사고의 과정이 필요하다. 이때, 있을 한 장 만드는 데 필요한 비즈의 수를 구하는 경우, 하나씩 세서 비즈의 수를 구할 수도 있고 비즈의 배열을 살펴보고 몇 개씩 몇 묶음으로 곱셈을 활용하여 구할 수도 있다. 이렇게 다양한 방법으로 탐구해 보고, 자신의 방법을 논리적이고 타당하게 설명할 수 있는지, 내 방법과 다른 친구의 방법에 대해서도 관심을 갖고 적절한지에 대해 비판적으로 사고할 수 있는지를 평가할 수 있다.

## (3) 의사소통 역량의 평가

의사소통 역량의 평가는 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등 수학적 표현을 이해하고 정확하게 사용하는지, 적절한 수학적 표현을 선택할 수 있는지, 수학적 표현 간에 변환을 할 수 있는지, 수학적 아이디어나 수학 학습 과정 및 결과에 대해 표현하고 다른 사람의 견해를 이해하는지, 수학적 표현의 편리함을 인식하는지, 타인을 배려하고 의견을 존중하는지 등을 고려한다(교육부, 2022). 예를 들어 [그림 2-16]과 같이  $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{12}$ 가 적절한지 토의하는 평가 과제라면 분자, 분모, 더하기 등의 수학적 용어와 기호를 사용하여 동분모 분수의 덧셈을 하는 방법을 설명할 수 있는지, 친구의 수학적 설명에 대해서도 이해하고 소통의 과정에서 수학적 표현의 편리함을 느끼는지, 다른 친구의 생각을 존중하고 배려하는지 등을 평가할 수 있다.

## (4) 연결 역량의 평가

연결 역량의 평가는 영역이나 학년(군) 내용 사이에서 개념, 원리, 법칙을 적절하게 관련지어 이해하는지, 수학의 개념, 원리, 법칙을 연계하여 새로운 지식을 생성할 수 있는지, 수학을 실생활이나 타 교과와의 지식, 기능, 경험에 적용할 수 있는지, 실생활이나 타 교과와의 지식, 기능, 경험을 수학적으로 해석할 수 있는지, 수학을 바탕으로 창의적으로 관련성을 찾을 수 있는지, 수학의 유용성을 인식하는지 등을 고려한다(교육부, 2022). 예를 들어 [그림 2-17]과 같이 두 사람의 개인 혼영 200 m 기록을 비교하는 평가 과제라면 실생활이나 체육 시간에 배웠던 수영 관련 경험과 연계하여 접영, 배영, 평영, 자유형의 기록을 합하여 혼영 기록을 구할 수 있는지, 소수의 덧셈 결과를 소수의 크기 비교와 연계하여 기록이 좋은 선수를 찾을 수 있는지, 수업 시간에 배웠던 수학이 다양한 곳에 활용됨을 느끼고 수학의 유용성을 인식할 수 있는지 등을 평가할 수 있다.

### (5) 정보처리 역량의 평가

정보처리 역량의 평가는 자료와 정보를 목적에 맞게 수집하고 변환하고 정리하는지, 자료를 바탕으로 도출한 결론이 적절한지, 교구나 공학 도구를 적절하게 활용하는지, 수학적 근거를 바탕으로 합리적으로 의사를 결정하는 태도를 갖고 있는지 등을 고려한다(교육부, 2022). 예를 들어 [그림 2-18]과 같이 산불이 발생한 건수 자료를 수집하여 그림그래프로 나타내고 산불 예방 교육 시기를 결정하는 평가 과제라면 국가통계포털 누리집, 인터넷 등 자료 수집이 용이한 방법을 찾을 수 있는지, 산불 발생 건수 자료를 토대로 산불 예방 교육 시기를 잘 도출하는지, 교구나 공학 도구를 활용하여 그래프를 그릴 수 있는지 등을 평가할 수 있다.

○ **단원명:** 3-1. 3. 나눗셈

평가 과제: 집 한 채를 짓는 데 사용할 수 있는 재료의 양 구하기



[그림 2-14] 문제해결 역량 평가 과제

○ 단원명: 3-1. 4. 곱셈

평가 과제: 네잎클로버 모양의 열쇠고리를 만드는 데  
필요한 비즈의 수 구하기



[그림 2-15] 추론 역량 평가 과제

○ **단원명:** 4-2. 1. 분수의 덧셈과 뺄셈

평가 과제:  $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{12}$ 가 적절한지 이야기 나누기



[그림 2-16] 의사소통 역량 평가 과제

○ 단원명: 4-2, 3. 소수의 덧셈과 뺄셈

평가 과제: 두 사람의 개인 혼영 200m 기록 비교하기

이름	여름	겨울	봄	가을
은비	42.71초	44.99초	48.27초	40.92초
건두	41.45초	45.28초	47.73초	41.25초

[그림 2-17] 연결 역량 평가 과제

○ 단원명: 3-2, 6. 그림그래프

평가 과제: 산불 발생 자료를 수집하여 그림그래프로 나타내고 산불 예방 교육 시기 정하기

계절	건수
1월	15건
2월	10건
3월	12건
4월	18건
5월	20건
6월	25건
7월	30건
8월	28건
9월	22건
10월	18건
11월	15건
12월	12건

[그림 2-18] 정보처리 역량 평가 과제

## 다. 다양한 평가 방법

### (1) 지필 평가 중 서술형 평가와 논술형 평가

평가 도구 중 지필 평가는 선택형, 단답형, 서술형, 논술형이 가능한데 최근 배움과 성장을 위한 평가와 과정을 중시하는 평가가 강조되면서 서술형 평가와 논술형 평가가 주목 받고 있다. 서술형 평가는 학생들이 주어진 문제에 대한 지식이나 개념, 원리 등을 서술하도록 하는 평가이고 논술형 평가는 주어진 내용이나 주제에 대해 학생들이 논리적으로 사고하면서 문제를 해결하는 과정을 서술하도록 하여 설득력, 이해력, 표현력, 창의력 등을 평가하는 평가 방법으로 구분한다(경기도교육청, 2024). 이들 평가는 학생들이 지식, 개념, 원리를 이해하고 있는지, 문제 상황을 논리적으로 분석, 해석하고 창의적으로 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. 이로 인해 채점기준표를 활용하는데, 학생들의 수행을 종합적인 관점에서 채점하는 총체적 채점과 학생들의 수행을 필수 평가 기준으로 나누어 판단하는 분석적 채점 방법으로 나눌 수 있다. 정리하면 [표 2-11]과 같다.

[표 2-11] 서술형 평가와 논술형 평가 비교

	서술형 평가	논술형 평가
유형	주어진 문제에 대한 지식이나 개념, 원리 등을 서술하도록 하는 평가 유형	주어진 내용이나 주제에 대해 학생들이 논리적으로 사고하면서 문제를 해결하는 과정을 서술하도록 하여 설득력, 이해력, 표현력, 창의력 등을 평가하는 유형
평가 방법	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 총체적 채점(해결 능력, 수준에 따라 점수를 주는 경우)</li> <li>• 분석적 채점(단계나 해결 부분에 대한 배점을 주고 합하는 경우)</li> </ul>	



## (2) 프로젝트 평가

프로젝트는 평가의 유형이라기보다 학습이나 과제의 형태이다. 학생들이 자신의 삶과 관련하여 인식된 문제를 토대로 주제를 설정하고 주제에 맞게 자료를 수집하고 해결하는 과정과 그 결과를 적절한 평가 방법으로 확인하는 것을 프로젝트 평가라고 할 수 있다. 프로젝트 평가는 학습하려는 내용과 역량을 신장시키고 평가 및 피드백이 되도록 프로젝트 과제를 설정하는 것이 매우 중요하다. 자율성, 선택, 자율적 시간, 책임감을 제공할 수 있어야 하고, 현실감 있고 학생들의 삶과 연결된 과제를 설정해야 하는데 그러다 보면 학습할 핵심 개념을 중심으로 배우지 못하고 주변이 중심이 되어 버리는 경향이 생길 수 있으므로 주의해야 한다.

프로젝트 평가는 하나의 평가 방법이 아니라 프로젝트에 참여하는 동안의 학습 태도 등 정의적 영역과 인지적 영역, 수학 교과 역량을 확인하기 위해 지필 평가(서·논술형 평가), 관찰 평가, 자기 평가, 동료 평가 등 다양한 과정을 중시하는 평가 방법이 적용될 수 있다. 또한 프로젝트 과정을 통해 수학에 대한 긍정적인 태도와 역량이 신장될 수 있도록 교사는 평가 즉시 피드백을 제공하여 더 나은 프로젝트 과정을 경험할 수 있게 도와주며 동료끼리 협력하여 만들어 나갈 수 있도록 가르쳐 주기보다 조력자의 역할을 적절히 해야 한다.

## (3) 포트폴리오 평가

포트폴리오 평가는 학생이 일정 기간 동안 학습 과정이 드러나는 자료와 결과물을 누적한 것으로 학습 활동에 대한 수행 정도를 평가하는 방법이다. 포트폴리오 평가는 학생 자신의 변화 과정을 파악할 수 있고 자기 평가 도구로 큰 가치가 있을 뿐만 아니라 이 평가 자료는 교사가 학생의 전반적인 면을 파악하고 면담 평가 자료로도 활용할 수 있다. 특히 포트폴리오 평가도 프로젝트 평가와 마찬가지로 한 가지 방법의 평가가 아니라 다양한 형태의 평가를 통해 이해력과 사고력을 평가할 수 있다. 학교 현장에서 포트폴리오라고 하면 단순히 학습했던 결과물을 파일에 모아 놓은 것이라고 오해하는 경우가 있는데 포트폴리오는 교사가 기간을 정해서 어떤 점에 대한 변화 과정을 살펴볼 것인지, 무엇을 평가하고 피드백은 어떻게 할 것인지 신중하게 계획해야 한다. 포트폴리오 평가는 주관성이 강해 신뢰도와 타당성에 의문이 제기될 수 있으므로 무엇을 어떻게 평가할 것인가 결정하는 것이 다른 평가 방법보다 힘들 수 있다.

포트폴리오 평가는 프로젝트 수업 전반에 대해 학생들의 활동 결과물을 누적하여 확인하는 경우 가능하고 한 단원이나 한 영역에 대한 학생의 학습 활동 내용을 누적시킬 수 있다. 예를 들어 3학년 때 1학기과 2학기에 걸쳐 곱셈과 나눗셈의 총 네 단원에 대한 학생의 이해와 성장을 살펴볼 수도 있다. 교사는 무엇을 평가하고 어떤 것을 누적시켜 학생 스스로 자기 평가가 가능하게 하고 적절한 피드백을 해 줄 것인지 계획하고 구성할 수 있다.

## (4) 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가

관찰 평가는 수업 중에 가장 많이 활용되는 평가 방법이다. 수업 중에 학생들의 수준을 살펴보고 바로 피드백해 주는 것이 학교 현장에서는 자연스럽다. 하지만 평가를 계획한다면 관찰 평가도 형식적 또는 비형식적으로 사전에 계획을 세우고 기록하며 진행하는 것이 더욱 효과적이라고 할 수 있다.

면담 평가는 학생 개개인과 일대일 평가 방법에 주로 이용되며 수학에 대한 정의적 영역과 인지적 영역을 심층적으로 평가하기에 유용하다.

구술 평가 또한 질문에 대한 학생들의 발표, 학생들 상호 간의 질의응답, 토의·토론 등을 통해



학생들이 수학 내용에 대해 얼마만큼 이해하는지, 사고 과정, 가치·태도 등을 평가하는 데 활용할 수 있다.

관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가의 유형 및 방법은 [표 2-12]와 같다.

[표 2-12] 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가의 비교

	관찰 평가	면담 평가	구술 평가
유형 및 방법	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 일화 기록법(관찰 대상을 있는 그대로 기술)</li> <li>• 체크리스트법(항목을 미리 정하고 체크)</li> <li>• 평정 척도법(관찰 요소마다 평정 척도를 기록)</li> <li>• 학습 결과물 관찰(수학 노트, 과제 등 확인)</li> <li>• 비디오 촬영 및 전사를 통한 관찰</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 구조화 면담/형식적 면담(미리 준비한 질문 틀 내에서 진행)</li> <li>• 반구조화 면담(기본적으로 준비된 질문이 있지만 상황에 따라 융통성 있게 진행)</li> <li>• 비구조화 면담/개방적 면담(자유롭게 진행)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 학생들의 발표, 질의응답, 토의·토론의 과정에서 평가</li> <li>• 학습자의 능동적인 수업 참여를 돕는 평가</li> </ul>
평가 방법	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 정의적 영역: 학습 태도(준비물, 과제, 노트 정리, 경청 등), 수학적 성향(집중과 끈기, 호기심과 자신감, 창의성)</li> <li>• 인지적 영역: 수학적 개념 및 절차, 문제해결, 의사소통, 추론, 연결, 정보처리</li> </ul>		

##### (5) 자기 평가, 동료 평가

자기 평가는 학생 스스로 자신의 학습 과정과 결과를 평가하는 방안으로 자신의 학습 성과를 판단하고 부족한 부분을 보완, 개선함으로써 학습에 대한 주도성을 높이고 학습 동기를 유발하여 학습 향상을 꾀하는 평가 방법이다.

동료 평가 또한 동료의 학습 과정이나 결과물에 대해 점수를 매기거나 의견을 제공하는 형태의 평가로서 평가에 대한 통찰력을 향상시키며 구체적인 피드백을 제공하도록 하면서 비판적 사고력도 향상시킬 수 있다.

## ④ 온·오프라인 교육 환경에서의 교수·학습 및 평가

2022 개정 교육과정에서는 스마트한 학습 환경을 조성하기 위해 디지털 기반의 학습과 온·오프라인 연계를 통한 효과적인 교수·학습 및 평가가 이루어지며, 지능정보기술을 활용한 맞춤형 수업과 평가가 가능하도록 지원하기 위해 원격수업과 관련된 내용을 문서화하였다. 효과적인 원격수업을 지원하기 위해 학교의 원격수업 기반 구축, 수업 설계·운영과 평가를 위한 다양한 디지털 플랫폼 등의 활용을 위한 지원을 요구하고 있다(교육부, 2022). 따라서 수학 수업에서 활용할 수 있는 원격수업의 의미와 운영 형태, 평가에 대해 알아보고자 한다.

### 1 원격수업

원격수업이란 방송·정보통신 매체 등을 이용하여 시간적·공간적 제약에 구애받지 아니하고 실시하는 일체의 교육 활동을 말한다(교육부, 2021a). 원격수업은 수업의 공간적 특성 및 시간적 특성을 기준으로 구분된다. 원격수업의 유형은 학교의 여건과 교과 특성에 따라 실시간 쌍방향 수업, 콘텐츠 활용 중심 수업, 과제 중심 수업 등 다양한 유형의 원격수업을 운영할 수 있으며, 특히 실시간 쌍방향 수업 시 학생의 수업 참여 및 교사와 학생 간 상호작용이 활성화되도록 노력해야 한다. 원격수업 유형별 운영 형태를 살펴보면 [표 2-13]과 같다(교육부, 2021a).

[표 2-13] 원격수업 유형별 운영 형태 예시

유형		운영 형태	예시
동시적 원격수업	실시간 쌍방향 수업	<ul style="list-style-type: none"> <li>실시간 원격교육 플랫폼을 활용하여 교사·학생 간 화상 수업을 실시하며, 실시간 온라인 대면 또는 비대면(학습 관리시스템[LMS], 관계소통망 대화방[SNS]) 등으로 교사·학생 간 교수·학습 활동 및 즉각적인 피드백이 이루어지는 수업</li> <li>단위 수업 시간과 동일하게 운영하되, 준비 시간을 고려하여 운영</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>실시간 온라인 대면 화상수업 도구</li> <li>온라인 비대면 수업 도구</li> </ul>
	콘텐츠 활용 중심 수업	<ul style="list-style-type: none"> <li>(강의형) 학생은 지정된 녹화 강의 혹은 학습 콘텐츠를 시청하고 교사는 학습 내용 확인 및 피드백</li> <li>(강의+활동형) 학습 콘텐츠 시청 후 댓글 등 원격 토론</li> <li>동영상 등 콘텐츠 시청, 학습 보고서 작성, 원격 토론, 피드백 시간 등을 포함하여 단위 수업 시간에 준하여 운영</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>강좌, 유튜브, 교사 자체 제작 자료 등</li> </ul>
비동시적 원격수업		<ul style="list-style-type: none"> <li>교사가 온라인으로 교과별 성취기준에 따라 학생의 자기주도적 학습 내용을 맥락적으로 확인 가능한 과제 제시 및 피드백</li> <li>정규 수업 시간 동안 수행 가능한 분량의 과제 제시, 학생 과제 수행 시간 및 피드백 시간을 포함하여 단위 수업 시간에 준하여 운영</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>과제 제시 → 학습지, 학습 자료 등 학생 활동 수행 → 학습 결과 제출 → 교사 확인 및 피드백</li> </ul>
기타		<ul style="list-style-type: none"> <li>교육청 및 학교 여건에 따라 별도로 정할 수 있음</li> </ul>	

원격수업을 운영할 때 주의할 점으로는 학습 결손이 발생하지 않도록 수학과 성취기준에 따른 수업을 제공하고, 단편적 강의 위주의 콘텐츠 학습만으로 수업을 진행하지 않도록 유의하며 학생 생각을 표현하고 활동한 결과를 제시할 수 있는 기회를 제공하여야 한다. 또한, 학생들이 원격수업

에 자율적이고 주도적으로 참여해야 하므로 학업에 대해 흥미를 가지고 학습을 지속할 수 있도록 학생별 피드백과 코칭을 제공해야 한다.

## 2 블렌디드 러닝(혼합 수업)

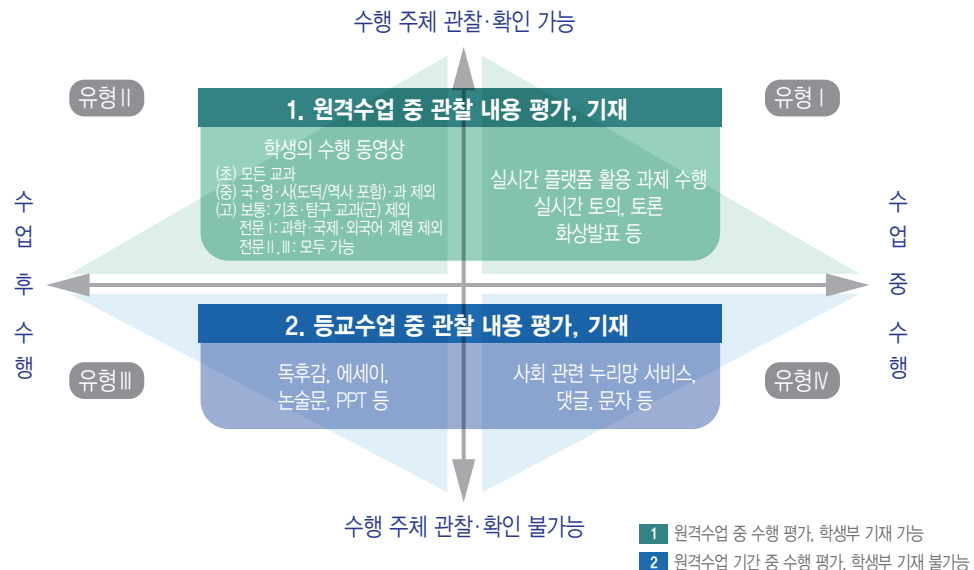
블렌디드 러닝(Blended Learning, 혼합 수업)은 학습 효과를 높이기 위해 원격학습과 등교학습 두 가지 환경을 혼합하는 것이다. 블렌디드 러닝은 [표 2-14]와 같이 원격수업 내에서도 다양한 수업을 혼합하여 지역 및 학교 실정과 학생들의 발달 단계에 따라 다양하게 적용하여 수업을 운영할 수 있다(교육부, 2020a). 또한, 원격수업과 등교수업 간의 블렌디드 러닝을 활용하여 온·오프라인 연계가 가능한 수업도 할 수 있다.

[표 2-14] 블렌디드 러닝 유형별 세부 모형 예시

유형	세부 모형 예시
원격수업 간 블렌디드	콘텐츠 활용 중심 수업(예습)+ 실시간 쌍방향 수업
	실시간 쌍방향 수업+ 과제 수행 중심 수업
	콘텐츠 활용 중심 수업+ 과제 수행 중심 수업+ 실시간 쌍방향 수업
원격수업+등교수업 블렌디드	원격수업(예습 학습)+ 등교수업(피드백, 프로젝트 학습)
	등교수업(핵심 개념 학습)+ 원격수업(확인 과제 학습·피드백)

## 3 평가

원격수업 및 등교수업에서 학습한 내용에 대해 학생의 학업 성취도를 지필 평가, 수행 평가 등을 통해 직접 관찰하여 평가의 객관성, 공정성, 투명성과 신뢰도를 제고할 필요가 있다. 원격수업 운영 시 지필 평가의 경우는 등교하여 실시하는 것을 원칙으로 하며, 수행 평가의 경우는 [그림 2-19]와 같이 유형에 따라 학생 평가의 가능 유무를 알아볼 수 있다(교육부, 2020b).



[그림 2-19] 원격수업 학생 평가 개념도

원격수업의 관찰 및 확인 가능 유무, 수업 중·후에 따른 수행 평가 시기에 따라 평가의 형태가 달라질 수 있다. 이를 정리하면 [표 2-15]와 같다.

[표 2-15] 원격수업 평가 유형 및 의미

원격수업 평가 유형		의미
관찰·확인 가능형	유형Ⅰ (수업 중)	교사가 실시간 쌍방향 화상 수업을 통해 직접 관찰·확인한 학생의 수행 과정 및 결과를 평가하는 형태(실시간 토의·토론, 화상 발표 등)
	유형Ⅱ (수업 후)	교사가 온라인 수업 후 학생이 제출한 동영상을 통해 교사가 직접 관찰·확인한 학생의 수행과 결과를 평가하는 형태(학생의 수행 동영상)
관찰·확인 불가형	유형Ⅲ (수업 후)	온라인 수업 시 학생이 제출한 과제의 수행 주제 및 과정을 교사가 직접 관찰할 수 없는 경우(독후감, 에세이, 논술문, PPT 등). 원칙적으로 과정을 중시하는 평가가 불가하나 평가 과제물과 연계한 등교수업(또는 실시간 쌍방향 화상 수업)에서 직접 관찰·확인하는 형태
	유형Ⅳ (수업 중)	온라인 수업 시 학생이 실시간 작성한 자료의 수행 주제 및 과정을 교사가 직접 관찰할 수 없는 경우(사회 관계 누리망 서비스(SNS), 댓글, 문자 등). 원칙적으로 과정을 중시하는 평가가 불가하나 해당 자료 및 교사 피드백과 연계한 등교수업(또는 실시간 쌍방향 화상 수업)에서 직접 관찰·확인하는 형태

원격수업에서 교사가 직접 관찰·확인하지 못한 학생 활동은 평가 및 학생부에 기재할 수 없음을 원칙으로 하며, 교육부(2021b)에서 안내한 원격수업 평가 유형에 따른 유의점을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 기기 문제, 접속 환경 장애 등 예상치 못한 상황으로 인하여 평가에 참여하지 못할 경우를 대비하여 재평가 실시 방안(평가 횟수 조정 등)을 사전에 계획하고 학생과 학부모에게 안내해야 한다.

둘째, 제출한 영상에 평가 요소에 대한 학생의 수행 과정과 주제 확인이 명확히 나타나도록 평가 계획을 구체화해야 한다. 학생에게 수행 과정에 대한 영상 촬영 방법을 안내하고 도움 자료를 제공하는 등 영상 촬영에 따른 유불리가 발생하지 않도록 한다.

셋째, 편집 프로그램을 사용하여 결과물을 변형시키는 일이 발생하지 않도록 원본 동영상을 제출하도록 안내하고, 동영상으로 인한 효과가 평가에 반영되지 않도록 한다.

넷째, 학습관리시스템(LMS)에 업로드, 메일, 사회 관계 누리망 서비스(SNS) 등으로 해당 영상을 제출하도록 하며, 제출된 영상에 대한 보관 방법(온라인 클라우드, 외장하드 등), 관리 대책 등을 수립하여 학업성적관리규정 및 교과(학년)별 평가 계획에 반영한다.

다섯째, 원격수업 과제물의 경우 수행 주체를 확인할 수 없고 과제형 평가가 금지되어 있으므로 평가에 직접 반영할 수 없으며, 이를 활용한 등교수업에서 학습 과정과 결과에 대해 교사가 직접 관찰·확인한 것을 토대로 평가가 이루어져야 한다.

## ⑤ 수학 교구 및 공학 도구의 활용

### 1 수학 교구의 활용

#### 가. 교구의 의미

표준국어대사전에서 교구(敎具)의 의미를 찾아보면 교구란, ‘학습을 구체화·직관화하고 효과적으로 지도하기 위하여 사용하는 도구’이다. 또한 남승인 외 9인(2019)과 최창우(2014)에 따르면 교구는 구체와 추상을 연결시켜 주는 매개체로 수학의 교수·학습 활동에 직접적으로 활용하는 구체물로 설명하고 있다. 이처럼 교구는 학습 효과를 높이기 위하여 교수·학습 과정에서 사용되는 도구라 할 수 있다.

교구와 혼용하여 사용하는 교수 자료는 교사가 수업을 효과적으로 구현하기 위해 사용하는 모든 자료를 의미하는 것으로 교과서, 신문, 표본, 사진, 영상, 모형 등이 이에 해당한다(안병곤, 2018; 안병곤 외 13인, 2016). 교수 자료가 교육을 위한 소재의 성격이라면 교구는 도구적 성격을 띠는 것으로 구분하기도 한다. 한편 공학적 도구란 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등을 의미하는 것으로(교육부, 2022) 교수 효과를 높인다는 점에서 교구와 공통점을 갖지만 전자 기술이 포함된 기기를 활용한다는 점에서 차이가 있다(안병곤 외 13인, 2016). 그러나 학자에 따라 교구의 개념을 매우 넓게 파악하여 교수 자료 등을 교구로 보기도 하고 새로운 수학 교구의 등장으로 교구의 종류가 다양해지고 범위가 확장되기도 한다. 즉 교구와 관련된 용어가 다양하고 학자들 간에도 관점의 차이가 있어 교구의 의미를 명확하게 규정하기 어렵지만 초등 수학 교육의 관점에서 교육의 목표를 효과적으로 달성하기 위해 교수·학습 활동에 직접적으로 사용하는 모든 자료를 총칭하는 것으로 볼 수 있다.

#### 나. 수학 학습과 교구

교구의 필요성을 대표적인 수학 교육학자들의 학습 이론과 관련지어 살펴보면 다음과 같다(안병곤 외 13인, 2016). 피아제(Piaget, J., 1896~1980)는 인지 발달 단계를 감각 운동기(0~2세), 전 조작기(2~7세), 구체적 조작기(7~12세), 형식적 조작기(12~15세)로 구분하였다(남승인 외 9인, 2019). 초등학생은 전 조작기 말과 구체적 조작기에 해당하므로 교구를 활용한 다양한 학습 경험이 더욱 필요하다. 또한 다양한 교구를 보고 다룬 경험은 개념에 대한 명확한 정신적 이미지를 갖게 하고 추상적 아이디어를 보다 완전하게 표현할 수 있도록 도와주기 때문에 교구를 활용한 학습이 필요하다.

남승인 외 9인(2019)에 따르면 브루너(Bruner, J. S., 1915~2016)도 지식을 표현하는 3가지 방법, 즉 인지적 표상 이론(EIS이론)을 [표 2-16]과 같이 제시하여 교구 활용의 중요성을 강조하였다. 인지적 표상 이론은 지식을 동작과 같은 활동적인 표상, 그림, 도표, 사진과 같은 영상적인 표상, 기호와 같은 상징적인 표상을 통해서 나타낼 수 있으며 개념에 대한 깊은 이해가 이루어지면 구체에서 추상적인 표상의 형태로 나타내는 경험이 필요하다. 예를 들어 물건의 개수를 셀 때, 손가락으로 수를 세거나 산가지, 바둑돌과 같은 교구를 활용하여 수를 세는 학습, 그림, 수직선 등과 같이 시각적으로 나타내며 수를 세는 학습, 1, 2, 3, ...과 같은 수학적 기호를 사용하여 물건의 개수를 세는 학습이 행해질 필요가 있다.

[표 2-16] 브루너의 인지적 표상 이론

인지적 표상 단계	지식의 표현 방법	수 세기 표상의 예
활동적(Enactive) 표상	동작을 통해서 표현	손가락, 산가지, 바둑돌 등 구체물로 수 세기
영상적(Iconic) 표상	그림, 도표 등 이미지로 표현	그림으로 물건의 개수 나타내기
상징적(Symbolic) 표상	상징적인 기호로 표현	1, 2, 3 등의 숫자로 나타내기

딘즈(Dienes, Z. P., 1916~2014)의 수학 학습의 원리에서도 교구 사용의 필요성 및 효율적인 사용 방법을 찾아볼 수 있다. 딘즈는 [표 2-17]에서 제시하는 바와 같이 학습에서 역동성을 강조했는데 예비 놀이, 구조화된 놀이, 실습 놀이 과정에서 수학적 개념이 형성될 수 있도록 교구를 활용하여 각 놀이 단계에 맞는 경험을 적절히 제공해야 한다고 했다. 한편 구성의 원리(Constructivity Principle)나 수학적 다양성의 원리(Mathematical Variability Principle), 지각적 다양성의 원리(Perceptual Variability Principle)는 수학적 이해를 높이는 교구 사용 방법과 관련하여 시사하는 바가 있다. 예를 들어 사각형을 학습하는 경우, 구성의 원리는 고무찰흙이나 막대 등으로 사각형을 먼저 만들어 보고 꼭짓점, 변과 같은 구성 요소를 학습하고, 수학적 다양성의 원리는 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 마름모와 같이 수학적으로 다양한 사각형을 통해 사각형의 개념을 추상화하며, 지각적 다양성의 원리는 같은 개념이라 하더라도 학생들의 개인차를 고려하여 색종이, 도형판 등 지각적으로 다양한 형태의 교구를 활용하여 학습하는 것과 관련된다(남승인 외 9인, 2019).

[표 2-17] 딘즈의 수학 학습의 원리

수학 학습 원리	설명	교구를 통한 도형 학습의 예
역동성의 원리	활동, 놀이를 통한 학습	색종이 접기, 고무찰흙이나 막대 등으로 사각형 만들기 놀이하기
구성 원리	구성이 분석에 선행	사각형 모양을 먼저 만들고 구성 요소를 학습하기
수학적 다양성의 원리	수학적으로 다양한 경험 제공	직사각형, 정사각형, 평행사변형, 마름모 등을 통해 사각형을 학습하기
지각적 다양성의 원리	지각적으로 다양한 경험 제공	색종이, 기하판 등을 통해 사각형을 학습하기

이상에서 살펴본 바와 같이 교구는 구체와 추상 사이의 간격을 좁혀 주고, 학생들에게 학습이 이루어지는 적절한 상황을 마련해 주는 도구로써 학습에 대한 동기와 흥미를 유발하고 수학 학습 내용의 이해에 폭넓은 경험을 제공해 준다. 즉, 수학 학습에서 다양한 교구와의 상호 작용은 학생들이 수학적 개념을 형성하고 원리를 탐구하며 법칙을 발견할 수 있도록 도와준다고 할 수 있다.

#### 다. 교구 활용의 효과 및 교구 활용 수업에서 고려해야 할 사항

교구를 사용함으로써 학생들은 학습에 다양한 효과를 얻을 수 있다. 수업에서 교구의 사용은 학생들의 의사소통과 사고를 촉진한다(안병곤, 2018). 예를 들어 덧셈의 계산 원리를 설명하도록 하

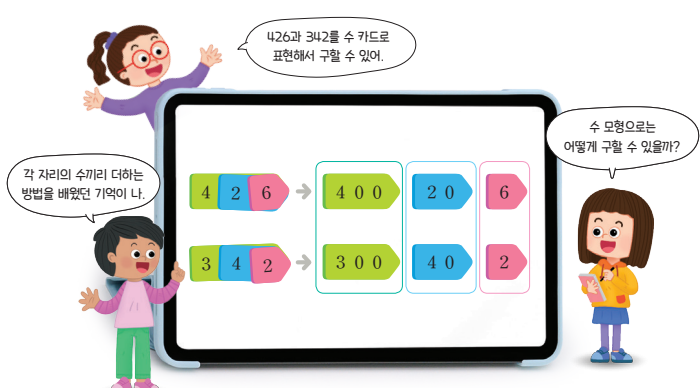
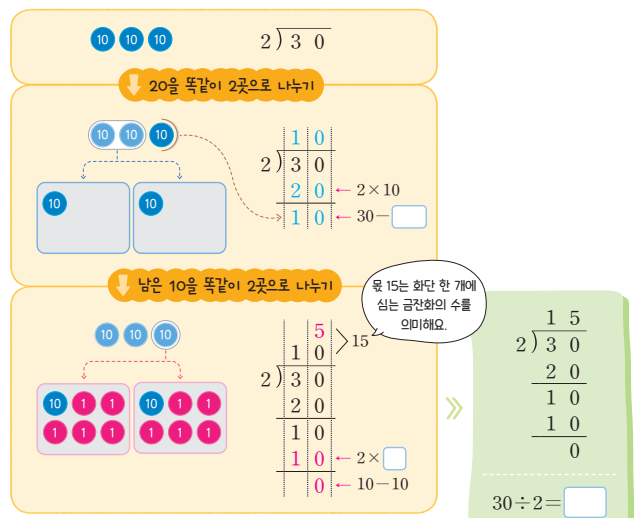
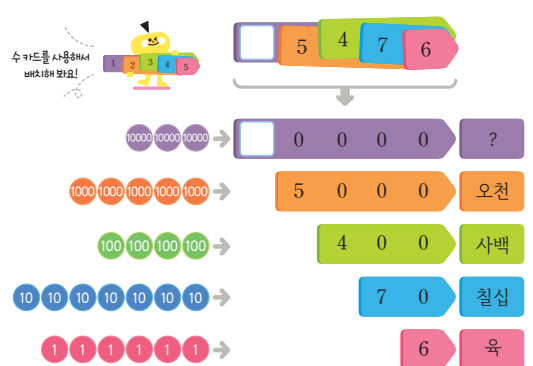


는 것보다 수 모형의 조작 과정을 설명하도록 하는 것이 의사소통을 촉진할 수 있다. “자릿값을 맞추어 일의 자리 수끼리, 십의 자리 수끼리 더했어요.”라고 설명하는 것보다 “같은 모양의 수 모형끼리 더했어요.”라고 말하는 것이 학생들에게는 더 쉽기 때문이다. 이처럼 교구를 이용하여 자신이 이해한 내용을 언어로 설명하는 과정은 사고 과정을 반성하게 해 준다. 또한 교구의 조작 과정은 학생들이 활동적으로 수학 학습에 참여하도록 함으로써 수학에 대한 흥미를 유발한다(안병곤, 2018). 이와 같이 학생 수준과 학습 내용에 적합한 교구의 활용은 인지적, 정의적 측면에서 다양한 효과가 있다. 하지만 교구는 학습을 대신해 주는 만능 도구가 아니다. 최창우(2014)가 제시한 교구 활용 수업에서 고려할 사항을 살펴보면 다음과 같다. 우선 교사는 교구 조작을 통해서 어떠한 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해시키는지를 명확히 하고 이러한 목적에 따라 가장 적절하고 효과적인 교구를 선택해야 한다. 다음으로 교사는 학생들에게 교구를 제공하기 전에 직접 조작해 보고 교구 활용의 과정에서 주의할 점, 학생들이 경험할 사고의 과정, 교구의 교육적 효과 등을 확인하고, 사용할 교구의 기능과 특성, 장점과 한계점 등을 미리 알고 있어야 한다. 이러한 교구에 대한 특성을 토대로 수업 중 교구 활용 시점 및 활용 방법에 대한 면밀한 계획을 세워야 하며 예측 불가능한 수업 상황을 고려하여 학생들의 흥미를 이끌고 조작이 쉬우며 효율성을 유지할 수 있는 대안적 교구에 대한 정보도 있어야 한다.

#### 라. 초등 3~4학년군 수학 수업에서의 교구 및 활용 방안

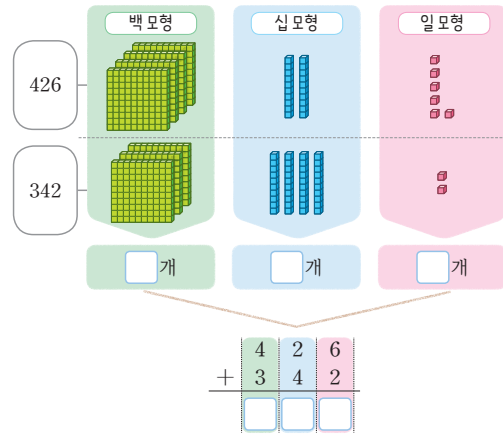
안병곤 외 13인(2016)의 수학 수업용 교구 표준안 개발 연구에서 제시한 초등 3~4학년군 수학 수업용 필수 교구와 그외 추가적으로 현 교과서에서 제시하고 있는 교구를 종합하여, 수학 영역별로 수업 시간에 활용할 수 있는 교구에 대한 활용 예시를 제시하면 다음과 같다. 여기에 제시한 교구들은 해당 수학 주제를 학습하는 데 효과적으로 활용될 수 있으므로 학교 여건과 학생 수준에 맞춰 수학 수업에서 융통성 있게 적용할 수 있다. 또한 활용 예시는 각 단원별로 대표적인 활동을 제시하거나 선택 활동으로 교구를 택하여 활동에 참여하도록 제시하였으며 동일한 수학 주제를 학습하는 데 여러 가지 교구 활용이 가능하므로 모두 사용하기보다는 적절하게 선택하여 사용하는 것이 좋다.

(1) 수와 연산 영역

교구	활용 예시(단원)
수 카드	<p><b>3-1 1. 덧셈과 뺄셈</b> - 세 자리 수를 수 카드로 표현해 본다.</p>  <p>426과 342를 수 카드로 표현해서 구할 수 있어.</p> <p>각 자리의 수끼리 더하는 방법을 배웠던 기억이 나.</p> <p>수 모형으로는 어떻게 구할 수 있을까?</p>
	<p><b>3-2 2. 나눗셈</b> - (몇십) ÷ (몇)을 수 카드로 계산하는 방법을 알아본다.</p>  <p>20을 똑같이 2곳으로 나누기</p> <p>남은 10을 똑같이 2곳으로 나누기</p> <p>몫 15는 화단 한 개에 심는 금잔화의 수를 의미해요.</p> <p><math>30 \div 2 = 15</math></p>
	<p><b>4-1 1. 큰 수</b> - 수 카드로 큰 수를 만들고 읽어 본다.</p>  <p>수 카드를 사용해서 백만 자리 만들어!</p> <p>10,000 10,000 10,000 → 0 0 0 0 ?</p> <p>1,000 1,000 1,000 1,000 1,000 → 5 0 0 0 오천</p> <p>100 100 100 100 → 4 0 0 사백</p> <p>10 10 10 10 10 10 10 → 7 0 칠십</p> <p>1 1 1 1 1 1 1 → 6 육</p>

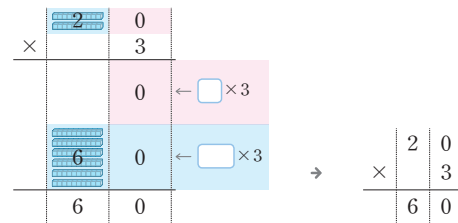
### 3-1 1. 덧셈과 뺄셈

- (세 자리 수)+(세 자리 수)를 수 모형으로 표현하고 구하는 방법을 알아본다.

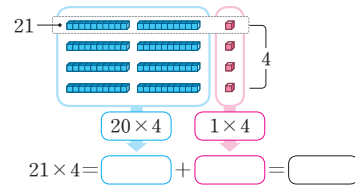


### 3-1 4. 곱셈

- (몇십) $\times$ (몇)을 수 모형으로 표현하고 계산하는 방법을 알아본다.

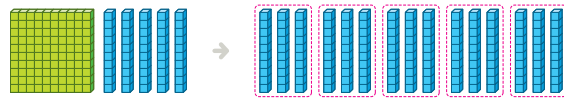





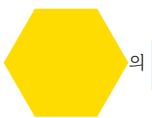

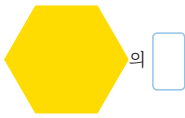
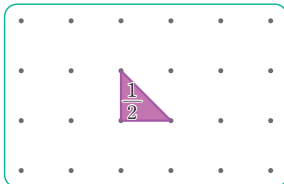
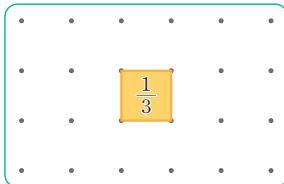
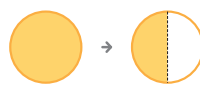

- (몇십몇) $\times$ (몇)을 수 모형으로 계산하는 방법을 알아본다.



### 4-1 3. 곱셈과 나눗셈

- (세 자리 수) $\div$ (몇십)을 수 모형으로 구하는 방법을 알아본다.

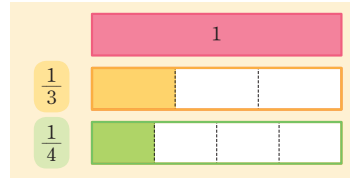


<p>모양 조각</p>	<p>3-1 6. 분수와 소수</p> <p>- 모양 조각으로 똑같이 나눈 것 중의 1을 나타내는 분수를 알아본다.</p> <div style="border: 1px solid #f08080; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>부분  은 전체  의 <input type="text"/> 입니다.</p> </div> <div style="border: 1px solid #f08080; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>부분  은 전체  의 <input type="text"/> 입니다.</p> </div> <div style="border: 1px solid #f08080; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>부분  은 전체  의 <input type="text"/> 입니다.</p> </div>
<p>점판</p>	<p>3-1 6. 분수와 소수</p> <p>- 점판을 이용하여 부분을 보고 전체를 완성해 본다.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid #40e0d0; padding: 10px; text-align: center;">  </div> <div style="border: 1px solid #40e0d0; padding: 10px; text-align: center;">  </div> </div>
<p>원형 분수</p>	<p>3-1 6. 분수와 소수</p> <p>- 원형 분수를 이용하여 분수를 이해한다.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>1      <math>\frac{1}{2}</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>1      <math>\frac{3}{4}</math></p> </div> </div>

분수 띠

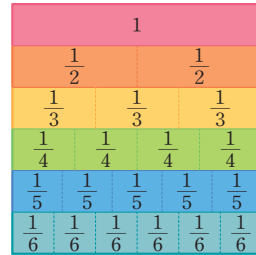
### 3-1 6. 분수와 소수

- 분수 띠를 이용하여 단위분수의 크기를 비교한다.

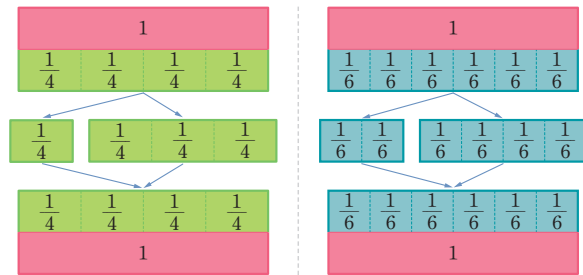


### 4-2 1. 분수의 덧셈과 뺄셈

- 분수 띠를 보고 1을 분수로 나타내는 방법을 생각해 본다.



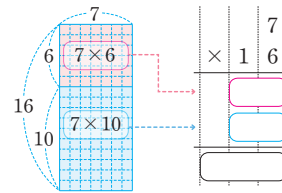
- 분수 띠를 사용하여 1을 가르고 분수를 모아 본다.



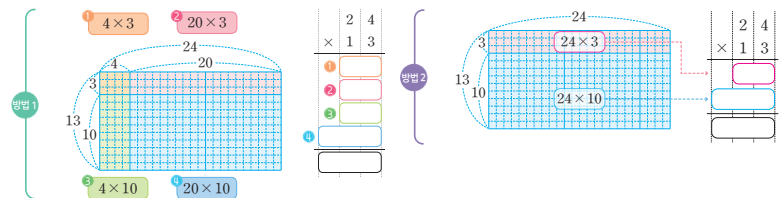
모눈종이

### 3-2 1. 곱셈

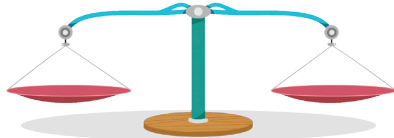

- 모눈종이를 보고 (몇) × (몇십몇)을 계산하는 방법을 알아본다.



- 모눈종이를 보고 (몇십몇) × (몇십몇)을 계산하는 방법을 알아본다.



(2) 변화와 관계 영역

교구	활용 예시(단원)																				
양팔저울	<p>4-1 6. 관계와 규칙</p> <p>- 크기가 같은 두 양을 찾는 데 사용한다.</p> 																				
쌓기나무	<p>4-1 6. 관계와 규칙</p> <p>- 쌓기나무를 이용한 모양의 배열에서 규칙을 찾아본다.</p> 																				
계산기	<p>4-1 6. 관계와 규칙</p> <p>- 곱셈식의 배열에서 규칙을 찾아본다.</p> <table border="1" data-bbox="911 980 1334 1190"> <tr> <td>첫째</td><td><math>121 \times 4 = 484</math></td></tr> <tr> <td>둘째</td><td><math>1221 \times 4 = 4884</math></td></tr> <tr> <td>셋째</td><td><math>12221 \times 4 = 48884</math></td></tr> <tr> <td>넷째</td><td><math>122221 \times 4 = 488884</math></td></tr> <tr> <td>다섯째</td><td><math>1222221 \times 4 = </math> <input type="text"/></td></tr> </table> <p>- 나눗셈식의 배열에서 규칙을 찾아본다.</p> <table border="1" data-bbox="961 1261 1288 1470"> <tr> <td>첫째</td><td><math>1111 \div 11 = 101</math></td></tr> <tr> <td>둘째</td><td><math>2222 \div 22 = 101</math></td></tr> <tr> <td>셋째</td><td><math>3333 \div 33 = 101</math></td></tr> <tr> <td>넷째</td><td><math>4444 \div 44 = 101</math></td></tr> <tr> <td>다섯째</td><td><math>5555 \div 55 = </math> <input type="text"/></td></tr> </table>	첫째	$121 \times 4 = 484$	둘째	$1221 \times 4 = 4884$	셋째	$12221 \times 4 = 48884$	넷째	$122221 \times 4 = 488884$	다섯째	$1222221 \times 4 = $ <input type="text"/>	첫째	$1111 \div 11 = 101$	둘째	$2222 \div 22 = 101$	셋째	$3333 \div 33 = 101$	넷째	$4444 \div 44 = 101$	다섯째	$5555 \div 55 = $ <input type="text"/>
첫째	$121 \times 4 = 484$																				
둘째	$1221 \times 4 = 4884$																				
셋째	$12221 \times 4 = 48884$																				
넷째	$122221 \times 4 = 488884$																				
다섯째	$1222221 \times 4 = $ <input type="text"/>																				
첫째	$1111 \div 11 = 101$																				
둘째	$2222 \div 22 = 101$																				
셋째	$3333 \div 33 = 101$																				
넷째	$4444 \div 44 = 101$																				
다섯째	$5555 \div 55 = $ <input type="text"/>																				



(3) 도형과 측정 영역

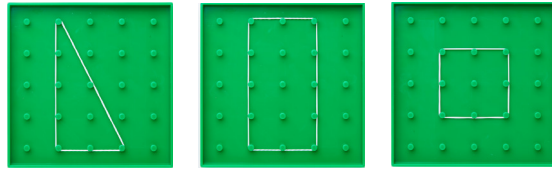
교구	활용 예시(단원)
삼각자	<p>3-1 2. 평면도형</p> <p>- 삼각자의 세 각을 본떠 본다.</p> 
	<p>4-2 2. 사각형</p> <p>- 주어진 직선에 평행선을 긋는 방법을 알아본다.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid #f0f0f0; padding: 5px; text-align: center;">  <p>주어진 직선에 두 삼각자의 한 변을 맞춰요.</p> </div> <div style="border: 1px solid #f0f0f0; padding: 5px; text-align: center;">  <p>한 삼각자를 움직여 직선을 그어요.</p> </div> </div>
접자	<p>3-1 2. 평면도형</p> <p>- 접자를 사용하여 각을 만들고 본떠 본다.</p> 
각도기	<p>4-1 2. 각도</p> <p>- 각도기의 이용 방법을 알고 각도를 재어 본다.</p> 
	<p>4-1 4. 삼각형</p> <p>- 각도기를 사용하여 이등변삼각형을 찾아본다.</p> <div style="border: 1px solid #add8e6; padding: 10px; text-align: center;">  </div> <p>- 각도기를 사용하여 정삼각형을 찾아본다.</p> <div style="border: 1px solid #add8e6; padding: 10px; text-align: center;">  </div>

모형 시계	<p><b>3-1 5. 길이와 시간</b></p> <p>- 1분보다 작은 단위를 살펴본다.</p> <div data-bbox="872 332 1372 491"> <p>11시 30분                      11시 30분 1초</p> </div> <p>- 시계를 이용하여 시간의 덧셈을 해 본다.</p> <div data-bbox="816 556 1433 737"> <p>시작한 시각                      25초 후                      11분 후                      끝난 시각</p> <p>10시 20분 25초                      <input type="text"/>                      <input type="text"/></p> </div> <p>- 시계를 이용하여 시간의 뺄셈을 해 본다.</p> <div data-bbox="816 810 1433 993"> <p>시작한 시각                      3분 전                      20초 전                      끝난 시각</p> <p><input type="text"/>                      <input type="text"/>                      11시 53분 40초</p> </div>
컴퍼스	<p><b>3-2 3. 원</b></p> <p>- 컴퍼스를 이용하여 원을 그려 본다.</p> <div data-bbox="824 1116 1422 1429"> <div> <p>1</p> <p>원의 중심이 되는 점 ○을 정합니다.</p> </div> <div> <p>2</p> <p>컴퍼스의 침과 연필의 끝부분을 반지름만큼 벌립니다.</p> </div> <div> <p>3</p> <p>컴퍼스의 침을 점 ○에 꽂고 컴퍼스를 돌려서 원을 그립니다.</p> </div> </div>
계량컵	<p><b>3-2 5. 길이와 무게</b></p> <p>- 서로 다른 컵의 물을 비커(계량컵)에 옮겨 담아 들이를 나타내어 본다.</p> <div data-bbox="844 1548 1400 1737"> </div>
양팔저울	<p><b>3-5 5. 길이와 무게</b></p> <p>- 양팔저울로 서로 다른 물체의 무게를 비교해 본다.</p> <div data-bbox="827 1860 1422 1957"> </div>

도형판

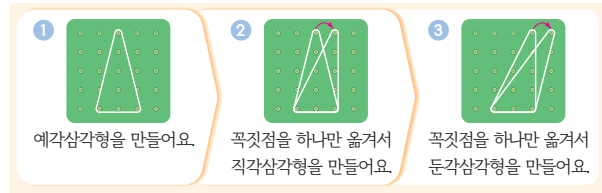
### 3-1 2. 평면도형

- 도형판에 직각삼각형, 직사각형, 정사각형을 만들어 본다.



### 4-1 4. 삼각형

- 도형판에 여러 가지 삼각형을 만들고 예각, 직각, 둔각의 수를 살펴본다.

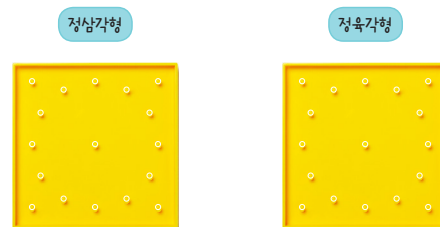


### 4-2 4. 다각형

- 도형판을 이용하여 다각형을 만들어 본다.



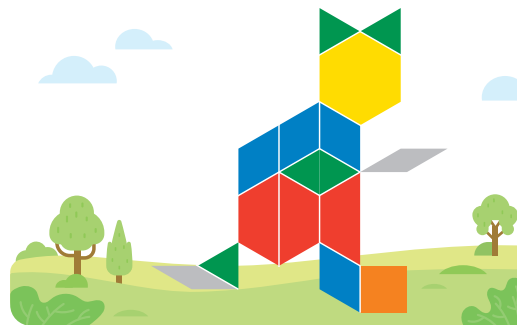
- 도형판을 이용하여 정다각형을 만들어 본다.



모양 조각

### 4-2 4. 다각형

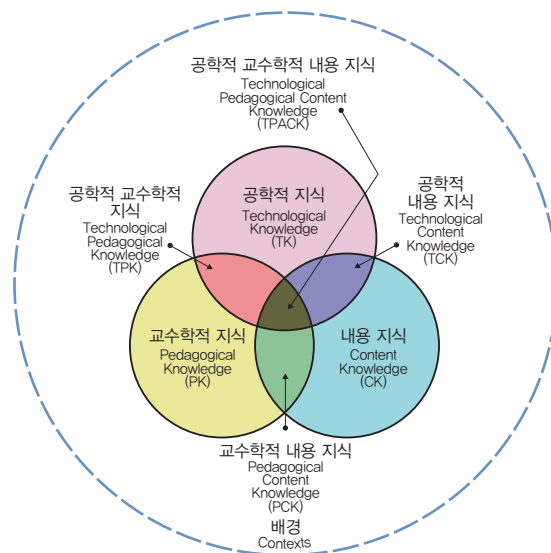
- 모양 조각으로 만든 모양을 살펴본다.



## 2 공학 도구의 활용

### 가. 공학적, 교수학적, 내용 지식

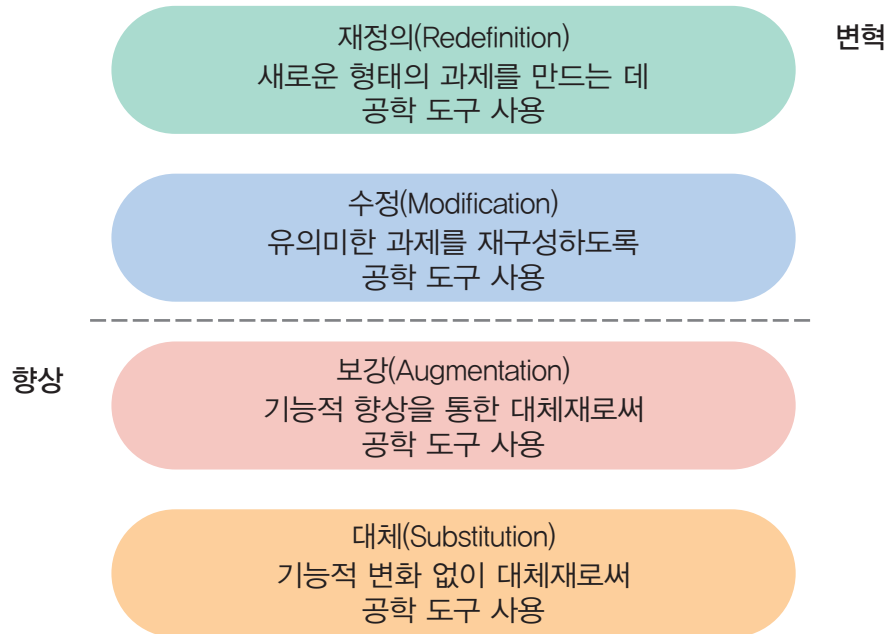
Mishara · Koehler(2006)는 교사들의 공학에 대한 지식을 공학적 교수학적 내용 지식(Technological Pedagogical and Content Knowledge; 이하 TPACK, [그림 2-20])으로 제시하였다. TPACK 7개의 영역으로 나누어져 있다. 공학적 지식, 교수학적 지식, 내용 지식, 공학적 교수학적 지식, 공학적 내용 지식, 교수학적 내용 지식, 그리고 TPACK이다. 공학적 지식은 공학 자체에 대해 교사가 가지고 있는 지식, 교수학적 지식은 학생의 사고와 같이 교수학적으로 알아야 할 지식, 내용 지식은 수학이나 과학 등 교과 내용적 전문 지식을 의미한다. 또한, 공학적 교수학적 지식은 수업에서 공학 도구를 활용할 때 다양한 공학 도구의 개별 특징에 대한 지식 또는 특정한 공학 도구를 사용한 결과가 어떻게 가르치는 일을 바꾸게 되는지를 아는 것을 의미한다. 예를 들어, 학생들이 파워포인트로 자신의 생각을 발표하고 공유하게 되면 보다 효율적으로 자신의 생각을 표현하고 의사소통할 수 있게 된다. 공학적 내용 지식은 공학 도구의 활용에 의해 변할 수 있는 내용 지식에 대해서 아는 것이다. 예를 들어, 수학에서 동적 기하 소프트웨어의 드래깅을 활용하면 기하학적인 개념과 관계에 대해서 전통적인 학습과는 다른 학습 기회를 가질 수 있게 된다. 교수학적 내용 지식은 특정 내용에 대하여 학생들의 이해를 촉진하도록 가르치는 방법에 대한 교사의 지식이다. 마지막으로 TPACK는 학생들을 공학 도구로 가르칠 때 내용 지식과 학생들을 안내하는 방법에 대한 지식을 의미한다. 예를 들어, 위키피디아를 통해서 교사와 학생이 협력적으로 의사소통하며 교사가 위키피디아에 대해 내용적 지식에 대해서 판단하는 동시에 위키피디아를 어떻게 활용하는지를 안내할 수 있어야 한다.



[그림 2-20] TPACK 프레임워크

### 나. 공학 도구의 통합

Puentedura(2010)는 대체(Substitution), 보강(Augmentation), 수정(Modification), 재정의(Redefinition) 네 단계로 설명하며 SAMR 모델을 제시한다([그림 2-21] 참조).



[그림 2-21] SAMR 모델

첫 번째 단계인 대체(Substitution)는 기능적인 변화없이 실물을 대체하여 공학 도구를 사용하는 것으로 교사들이 공학 도구를 활용할 수 있는 가장 쉬운 방법이다. 예를 들어, 수학 수업에서 활용하는 실물 쌓기나무 대신에 디지털 교구로 쌓기나무 활동을 할 수 있다. 두 번째 단계인 보강(Augmentation)은 기능적인 향상을 통한 대체재로써 공학 도구를 사용하는 것이다. 예를 들어, 구체물인 수 모형에서는 수를 받아내림하기가 어려울 수 있으나, 디지털 교구로 제공되는 수 모형은 클릭 한 번으로 백 모형을 십 모형 10개로 또는 십 모형을 일 모형 10개로 교환할 수 있다. 세 번째 단계인 수정(Modification)은 공학 도구를 활용하여 수학적 과제나 활동을 유의미하게 재구성한다. 예를 들어, 동적 기하 소프트웨어를 통해서 평행사변형의 성질을 살펴볼 때, 평행사변형의 한 점을 드래그해서 조작하여도 평행의 성질이 유지된다면 학생들은 크기가 달라지는 무수히 많은 평행사변형을 보면서 수학적으로 변하지 않는 성질을 익힐 수 있다. 마지막 단계인 재정의(Redefinition)는 공학 도구를 통해 새로운 형태의 과제를 만드는 것을 의미한다. 예를 들어, 메타버스와 같은 가상공간에서 학생들이 협력적으로 수학 문제를 해결하기 위해 아바타를 통해서 서로 수학적으로 토론해 나가는 활동은 기존의 교실의 벽을 허무는 새로운 형태의 학습이 된다.

#### 다. 공학 도구의 효과

수학 내용을 성급하게 형식화, 기호화하는 것은 우리나라 수학 수업에서 학생들이 수학을 어렵게 느끼게 만드는 원인 중 하나이다. 이것을 보완할 수 있는 방안으로 공학 도구를 교수·학습에 적극적으로 활용할 수 있다. 공학 도구는 수학 내용을 시각화함으로써 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하는 데 도움을 줄 수 있다. 복잡한 계산이나 대수적인 문자식을 처리하게 함으로써 사고력 중심의 교수·학습 활동에 전념하게 할 수 있다.

공학 도구는 여러 가지 활동이 가능하므로 활동 중심의 수학 교육 학습 원리를 구현하는 데 도움을 줄 수 있다. 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래프, 애니메이션, 동영상, 시뮬레이션 등을 통한 직관적인 탐구 활동을 제공해 줄 수 있다. 증명 이전에 연역해야 할 사실에 대한 직관적 이해 또는 관찰에 의한 발견의 과정을 제공할 수 있다.

## 라. 초등 3~4학년군 수학 수업에서의 공학 도구 및 활용 방안

### ■ 알지오매스 키즈(Algeomath Kids)

알지오매스 키즈는 한국과학창의재단이 학생들의 도형 학습을 위해 만든 수업 도구이다. 초등학생을 위한 알지오매스 수학 도구를 이용하여 보다 더 쉽고 직관적으로 창의적인 수학 실습을 진행할 수 있다.



### ◎ '알지오매스 키즈' 이용 방법

1

알지오매스 키즈에 접속하여 '알지오도구'를 선택한 후, '알지오매스 키즈 2D'를 선택

2

왼쪽의 도구를 사용하여 다양한 활동하기

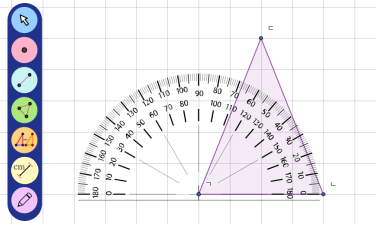
순으로 선택하여 원하는 선분 그리기

순으로 선택하여 원 그리기

순으로 선택하고 정삼각형, 직각삼각형, 이등변삼각형 중에 선택하여 그리기

\* 을 선택하여 사각형, 또 다른 을 선택하여 다각형, 을 선택하여 정다각형을 나타낼 수 있음.





순으로 선택하여 이등변삼각형의 세 각의 크기 재기

(각  $\gamma$ 의 크기를 구하고 싶을 때 점  $\alpha$ , 점  $\beta$ , 점  $\gamma$  순으로 누름.)



를 선택하여 길이 재기



선택

그룹선택

복제

삭제

체크박스



점

대상 위의 점



밀기

뒤집기



크기 조절

글자 넣기

그리기

그림 넣기



에서 여러 도구를 사용할 수 있고, 에서 다양한 활동을 할 수 있음.



## ◎ 이렇게 수업에 활용해요!

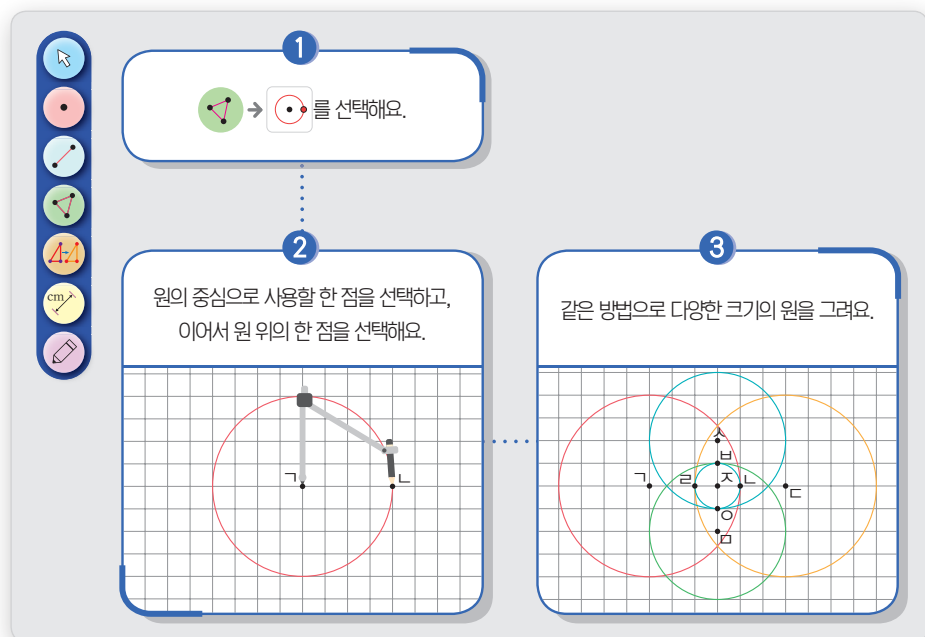
### 3-1 2. 평면도형

- 주제: 알지오매스 키즈로 캐릭터 만들기
- 수업 흐름: 직각삼각형, 직사각형, 정사각형의 성질을 탐구하기 위해서 알지오매스 키즈로 여러 가지 도형을 만들어 주어진 캐릭터를 완성하고 조건에 맞는 캐릭터를 다양한 방법으로 만들어 보게 한다.



### 3-2 3. 원

- 주제: 알지오매스 키즈를 이용하여 다양한 크기의 원 그리기
- 수업 흐름: 다양한 크기의 원을 탐구하기 위해 알지오매스 키즈를 이용하여 나만의 방법으로 여러 가지 크기의 원을 그려 보고 원을 그릴 때 편리한 점을 이야기해 보게 한다.



#### 4-1 4. 삼각형

- 주제: 이등변삼각형과 정삼각형의 성질 확인하기
- 수업 흐름: 구체적 조작 활동을 통해 이등변삼각형과 정삼각형의 성질을 탐구한 후 알지오매스 키즈를 이용하여 이등변삼각형과 정삼각형을 그려 보고 세 각의 크기를 재어 각의 크기를 비교하며 성질을 확인하도록 한다.

**1**

선택하여 이등변삼각형을 완성해요.

**2**

이등변삼각형의 세 각의 크기를 재고 각의 크기를 비교해요.

**3**

선택하여 정삼각형을 완성하고 **2**와 같은 방법으로 각의 크기를 비교해요.

#### 4-2 2. 사각형

- 주제: 알지오매스로 마름모 그리기
- 수업 흐름: 마름모의 성질을 생각해 보고, 원의 성질을 이용하여 마름모를 그려 보게 한다.

**1**

을 선택하여 반지름이 5 cm 인 원 두 개를 서로 겹치게 그립니다.

**2**

을 선택하여 두 원이 서로 만나는 점을 찍습니다.

점을 찍어 봐!

**3**

을 선택하여 두 원이 만나는 점과 두 원의 중심을 연결합니다.

**4**

을 선택하여 원을 잡고 움직이며 여러 가지 마름모를 관찰합니다.

완성!

## ■ 똑똑! 수학탐험대

한국교육학술정보원이 개발한 똑똑! 수학탐험대 3~4학년군은 인공지능을 활용하여 학생 개인에게 필요한 학습을 추천해 주고 학습 이력도 관리해 준다. 학생들은 교과 활동, 탐험 활동, 인공지능 추천 활동 등 다양한 활동을 통해서 수학 학습에 참여할 수 있고 디지털 교구 및 평가 콘텐츠도 활용할 수 있다.



### ◎ ‘똑똑! 수학탐험대’ 이용 방법



### ◎ 이렇게 수업에 활용해요!

#### 4-2 4. 다각형

- 주제: 똑똑! 수학탐험대의 칠교판 교구를 선택하여 예시 작품으로 나오는 모양 채우기
- 수업 흐름: 본 차시의 추가 활동으로 똑똑! 수학탐험대의 디지털 교구를 이용하여 여러 가지 모양 채우기를 해 본다.

똑똑! 수학탐험대를 이용하여 모양 채우기

디지털로 활동해요

1

▶ 탐험시작

→
→
를 선택해요.

2

칠교판

→

예시작품만들기

또는

패턴블록

→

예시작품만들기

를 선택하여 원하는 예시 작품을 고른 후 주어진 모양을 채워요.

예시작품을 골라보아요.

선택

→

일과놀이
필요한
패턴블록

예시작품만들기

완료

똑똑! 수학탐험대

www.toctocmath.kr



## ■ 이지통계(초등학교용)

이지통계는 이비에스매스(EBSMath)에서 개발한 통계 전문 소프트웨어로, 자료 입력부터 그래프 표현까지 직관적으로 활용할 수 있도록 구성되어 있다. 자료를 바탕으로 세부 기능을 이용하여 막대그래프, 꺾은선그래프를 나타낼 수 있다.

### ◎ ‘이지통계’ 이용 방법

**1**

이지통계에 접속하여 교과서 표현은 ON으로 바꾸고, 시작하기 선택

**2**

자료 입력에서 표를 선택하여 자료 입력

**3**

그래프에서 막대그래프를 선택하여 그래프 설정 입력

**4**

막대그래프 완성

**5**

이미지 저장 버튼을 누르면 막대그래프 저장 가능

114 수학 4-1 교사용 지도서

## ◎ 이렇게 수업에 활용해요!

### 4-1 5. 막대그래프

- 주제: 이지통계로 막대그래프 나타내기
- 수업 흐름: 이지통계를 이용하여 지역별 문화유산 수를 막대그래프로 나타낸다.

**다지털로 활동해요**

**이지통계로 막대그래프 나타내기**

1 이지통계를 사용하여 여러 지역의 문화유산 수를 막대그래프로 나타내는 방법을 살펴봅시다.

**지역별 문화유산 수**

지역	경주	대구	부산	제주	인천	합계
문화유산 수(명)	50	126	108	112	78	474

[출처: 국가유산청, 2019]

• 막대그래프로 나타내는 방법을 알아보세요.

이지통계 앱에서 여러 요소를 화면에 표시할 수 있습니다. 화면 상단에는 '이지통계' 로고와 '지역별 문화유산 수' 제목이 표시되고, 화면 하단에는 '지역별 문화유산 수' 그래프가 표시됩니다.

그래프에서 '지역별 문화유산 수' 그래프를 선택하여 그래프 설정을 각각 입력하세요.

**지역별 문화유산 수**

이지통계를 사용하여 여러 지역의 문화유산 수를 막대그래프로 나타내어 보세요.

이지통계를 사용하여 조사한 자료를 막대그래프로 나타냈을 때 편리한 점을 이야기해 보세요.

2 광역시에 있는 어린이 공원 수를 조사하여 나타낸 표입니다. 이지통계를 사용하여 표를 보고 막대그래프로 나타내어 봅시다.

**광역시별 어린이 공원 수**

광역시	경주	대구	대전	부산	인천	합계
어린이 공원 수(개소)	396	478	315	430	328	2550

[출처: 국가통계포털, 2019]

• '이'는 앞글자 음절에서 시작합니다.

### 4-2 5. 꺾은선그래프

- 주제: 이지통계로 꺾은선그래프 나타내기
- 수업 흐름: 이지통계를 이용하여 연도별 다문화 가구 수를 꺾은선그래프로 나타낸다.

**다지털로 활동해요**

**이지통계로 꺾은선그래프 나타내기**

이지통계를 사용하여 연도별 다문화 가구 수를 꺾은선그래프로 나타내어 봅시다.

**연도별 다문화 가구 수**

연도(년)	2018	2019	2020	2021	2022
가2 4(가2)	334856	353803	367775	385219	399396

[출처: 국가통계포털, 2022]

이지통계 앱에서 여러 요소를 화면에 표시할 수 있습니다. 화면 상단에는 '이지통계' 로고와 '연도별 다문화 가구 수' 제목이 표시되고, 화면 하단에는 '연도별 다문화 가구 수' 그래프가 표시됩니다.

그래프에서 '연도별 다문화 가구 수' 그래프를 선택하여 그래프 설정을 각각 입력하세요.

**연도별 다문화 가구 수**

이지통계를 사용하여 조사한 자료를 꺾은선그래프로 나타냈을 때 편리한 점을 이야기해 보세요.



## 수학과 교과용 도서의 편찬 방향

## 수학

- 2022 개정 교육과정과 연계하여 미래 사회가 요구하는 역량 함양
- 국내외 학술 연구 기반의 학년 수준과 학습 경로 및 계열성 고려
- 개념과 원리 중심의 깊이 있는 학습을 통한 수학적 힘 기르기
- 범교과적인 소재를 통해 배움을 즐기는 행복 교육
- 프로젝트 형태의 주제 중심 학습을 통한 창의적 문제해결 능력 신장
- 교구 및 디지털 공학 도구 활용을 통한 디지털 소양 신장
- 도입 상황-생각 톡-개념 쏙-문제 척의 구성으로 단계적 학습 구현

## 수학익힘

- “수학”과 연계된 확인 문제 및 응용 문제 제공
- 내용 정리, 맞춤형 문제 해결, 평가 과정을 통해 학습 주도성 신장
- 창의적 수학적 문제 상황과 탐구를 통한 수학 교과 역량 증진
- 수학 학습의 즐거움을 느끼고 필요성과 유용성 인식
- 교과서 한 번 더 학습해요-익힘 문제-수학에 풍당의 구성으로 자기주도적 학습력 향상

## 지도서

- 교육과정을 충실히 반영한 단원과 차시별 교수·학습 과정안 제공
- 학생의 성장을 지원할 수 있는 주제별·수준별·맞춤형 평가지 제공
- 범교과 내용이 연계된 도입 상황 활용 안내, 학생의 사고를 유도하는 구체적인 발문과 지도 팁(Tip)
- 차시별로 성장 지원·과정 중심 평가와 평가 후 지도 방안
- “수학”의 흐름과 시기에 맞게 필요한 자료와 교수·학습 과정 안내
- “수학익힘”과 연계를 강화하여 차시별 수학익힘 풀이와 창의적 해결 방안의 예시 제공

## 전자저작물

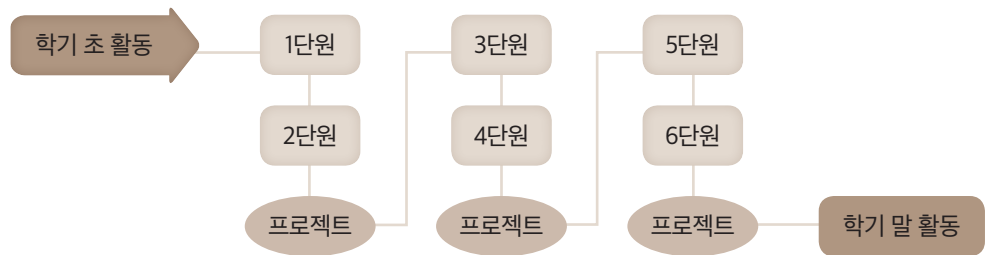
- 효과적인 수학 교수를 위한 수업 자료 모음
- 학생들의 흥미를 지속하고 학습한 내용을 점검할 수 있는 게임 활동
- 탐구와 조작 활동을 통한 디지털 교구
- 다양한 멀티미디어를 포함한 전자책
- 학생들의 학습 과정에 대한 다양한 정보를 제공하는 평가 자료

## 1 수학의 구성 체제와 활용 방안

### 1 수학 구성 개요

“수학”은 ‘수와 연산’, ‘변화와 관계’, ‘도형과 측정’, ‘자료와 가능성’의 내용 영역에 대해서 삶과 연계하여 깊이 있는 학습을 구현하고 수학 교과 역량인 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리 역량을 신장할 수 있도록 구성하였다. 학생들이 수학적 흥미와 호기심을 느낄 수 있도록 범교과적인 소재를 제시하고, 학년의 수준과 계열성에 맞게 학습 내용을 구성하였다. “수학”은 6개의 주요 단원들과 함께 학기 초에 노래를 통해 학생들에게 학기 전체를 탐색할 수 있는 ‘학기 초 활동’과 학기에서 학습한 내용을 놀이를 통해 정리할 수 있는 ‘학기 말 활동’을 구성하였다. 또한, 두 단원마다 프로젝트 활동인 ‘수학을 잇기’를 구성하여 배운 내용끼리 연결하고 타 교과와도 연결하여 학습한 내용을 창의·융합적으로 적용해 보는 기회를 제공하였다.

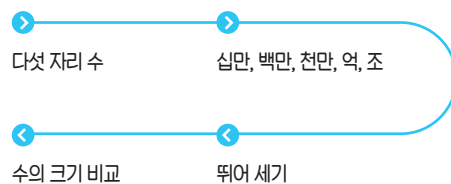
“수학”의 전반적인 구성은 다음과 같다.



[그림 3-1] “수학”의 구성 체계

단원 도입에 제시한 학습 내비게이션은 학생들이 교과서 단원 중 현재 어느 위치에서 어떤 주제를 학습하고 있는지를 보여 주는 안내 자료이다.

수학 교과 역량인 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리 역량을 관련된 활동이나 문제에 명시적으로 표현하기 위해 아이콘을 이용하여 나타내었다.



▲ 학습 내비게이션

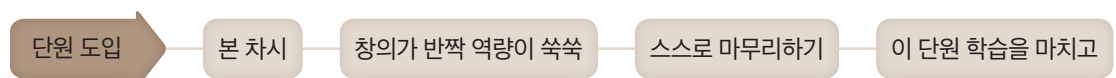


▲ 수학 교과 역량

“수학”에는 QR 코드를 이용하여 수학 교구 및 멀티미디어 자료를 경험하거나 누리집에 쉽게 접속할 수 있도록 하였다. QR 코드는 모바일 기기의 카메라를 이용하여 온라인 사이트에 접속할 수 있는 방식으로, 디지털 교구, 재미있는 수학, 참고 자료, 학습 만화 등을 보충 학습할 수 있다.

### 2 수학의 단원별 구성 체제와 활용 방안

각 단원별로 “수학”의 구성 체제는 다음과 같다.



[그림 3-2] “수학”의 단원별 구성 체계

## 가. 단원 도입

단원 도입에서는 단원 학습을 시작하기 전에 흥미와 관심을 불러일으킬 만한 소재와 상황으로 삽화를 구성하여 수업에 활용할 수 있도록 하였다. 특히 소재는 범교과 학습 주제를 도입함으로써 학생들이 삶과 연계하여 실생활에서 수학이 활용될 수 있고 이를 통해 학습에 흥미를 느낄 수 있도록 하였다.

‘준비하기’에서는 이전에 배운 내용을 포함한 선수 학습 문제 3개를 제시하였고, 필요한 경우 “수학익힘”의 ‘스스로 준비 학습’을 활용할 수 있다.

삽화 상황에 제시한 말풍선과 오른쪽 단원 핵심 질문을 통해 학생들이 단원에서 학습해야 할 주요한 내용에 대해 무엇을 배울지 궁금증을 가지고 학습에 임할 수 있도록 발문을 제공하였다. 이 핵심 질문들에 대한 대답은 ‘이 단원 학습을 마치고’에서 학습 만화를 통해 이루어지도록 구성하였다.



※ 범교과 학습 주제: 안전·건강 교육, 인성 교육, 진로 교육, 민주 시민 교육, 인권 교육, 다문화 교육, 통일 교육, 독도 교육, 경제·금융 교육, 환경·지속가능발전 교육

## 나. 본 차시

‘본 차시’의 구성은 다음과 같다.



[그림 3-3] ‘본 차시’의 구성 체계

도입 상황에서는 실생활과 관련된 내용을 바탕으로 차시 학습의 도입을 구성하여 자연스럽게 학습 문제와 활동으로 연결 지을 수 있게 하였다. 문장으로 학습 문제에 대해 안내하고, 삽화로 친숙하게 상황을 이해하고 접근할 수 있게 구성하였다. ‘생각 톡’에서는 도입 상황에서 제시된 문제 상황을 직접 해결하기 전에 다양한 개방형 발문들을 통해 친구들과 생각을 나누는 활동으로 구성하였다. ‘개념 쑥’은 해당 차시에서 달성하고자 하는 학습 목표를 구체화하는 학습 활동으로 구성하였다. 마지막으로 ‘문제 척’은 학습한 내용을 응용 및 적용해 볼 수 있도록 연습 활동을 제공하였다. 이처럼 학습 활동과 연습 활동을 골고루 강조하여 학생들이 개념적인 배움뿐만 아니라 배운 내용을 바로 적용할 수 있도록 구성하였다.

본 차시에는 공통적으로 해당 차시와 연결된 “수학익힘” 쪽수를 제시하여 필요한 경우 “수학익힘”을 활용할 수 있다. 또한, 준비물 꾸러미를 활용하여 개념을 익히는 데 도움이 되도록 하였다. 이외에도 필요한 경우 학습 도움말을 통해서 이전 학년 내용을 상기시켜 차시 학습과 연결 지을 수 있고, 어려운 단어를 쉽게 풀어 설명하여 학습에 대한 이해를 높일 수 있도록 하였다.

학습 내비게이션

개념 속

도입 상황

생각 톡

1000이 10개인 수를 알아볼까요?

준비한 돈은 모두 얼마인지 생각해 봅시다.

- 1000원짜리 세이 보면서 □ 안에 알맞은 수나 말을 써넣으세요.

1장	2장	3장	4장	5장
1000원	2000원	3000원	4000원	5000원
□ 장	□ 장	□ 장	□ 장	□ 장

1000원짜리 지폐가 10장이면 얼마라고 할까요?

1000이 10개인 수를 10000 또는 1만이라고 쓰고 1만이라고 읽습니다.

10000이 얼마만큼의 수인지 알아봅시다.

- 10배씩 커지는 관계를 생각하여 빈칸에 알맞은 수를 써넣으세요.

1  
↓ 10배  
10  
↓ 10배  
100  
↓ 10배  
1000

10000이 각각의 수보다 얼마만큼 더 큰 수인지 수직선을 보고 □ 안에 알맞은 수를 써넣으세요.

□ 안에 알맞은 수를 써넣으세요.

- 10000은 7000보다 □ 만큼 더 큰 수입니다.
- 10000은 9000보다 □ 만큼 더 큰 수입니다.
- 10000은 100의 □ 배인 수입니다.

QR 코드

문제 척

본 차시에서 교과서 활동을 창의적으로 구성한 부분으로 ‘토의·토론’ 학습이 있다. 수학 수업에서 ‘토의·토론’의 효과적인 전개를 위해 도입 활동에서 학생들이 겪기 쉬운 수학적 오개념이나 오류를 소재 내용으로 구성하였다. 생각 신호등을 통해서 학생들의 생각을 찬성 또는 반대로 나누고 이처럼 생각하게 된 이유를 고민할 기회를 제공하였다.

토의·토론

5 토의·토론

17 ÷ 54 = 318 ÷ 9

주어진 식에 대한 하윤이와 동연이의 의견에 대해 이야기해 봅시다.

하윤이: 17 ÷ 54 = 318 ÷ 9  
양변에 9를 곱하면 17 × 9 = 318  
17 × 9 = 153, 318 ÷ 9 = 35.33...  
17 ÷ 54 = 318 ÷ 9는 틀리다.

동연이: 17 ÷ 54 = 318 ÷ 9  
양변에 9를 곱하면 17 × 9 = 318  
17 × 9 = 153, 318 ÷ 9 = 35.33...  
17 ÷ 54 = 318 ÷ 9는 틀리다.

그렇게 생각한 이유를 쓰고, 모든 친구들과 이야기해 보세요.

토의·토론하기

찬성하는 이유: \_\_\_\_\_

반대하는 이유: \_\_\_\_\_

토의·토론하기

찬성하는 이유: \_\_\_\_\_

반대하는 이유: \_\_\_\_\_

‘선택 활동’은 학습 활동이나 문제에서 학생들의 다양한 선택권을 바탕으로 학습 주도성을 신장시키기 위해 구성하였다. 학생들은 각자 방법이나 문제를 선택하고 이를 바탕으로 활동을 수행할 수 있다. 교실에서 학생들은 개별적으로 다양한 활동을 수행하게 되고, 교사는 이러한 다양성이 있는 상황에서 학생들의 서로 다른 전략을 소개한다. 학생들이 선택할 수 있는 부분은 방법적인 선택, 도구적인 선택, 상황적인 선택 등으로 나뉘고, 때에 따라서는 학생이 직접 선택 방법을 정해서 활동에 참여할 수 있다.

선택 활동

**7** 생활 속에서 익혀 조를 사용하는 경우를 조사해 봅시다.

- 예시를 보고, 찾고 싶은 주제를 생각해 보세요.

**예시**

**인사**

**국가 예산**

**배경화상사와의 거래**

- 큰 수를 찾는 방법을 생각해 보세요.

**방법** **신문에서 조사하기**

☐ 인터넷에서 찾기

☐ 책, 신문에서 찾기

☐ 뉴스, 광고에서 찾기

- 내가 선택한 방법으로 조사한 내용을 써 보세요.

주제	내가 찾은 수
<input checked="" type="checkbox"/> 배영으로부터 남경까지의 거리	198200000 km

(출처: 중앙 사회학, '찾아보기'는 인터넷에서 찾아보기)

- 조사를 통해 알게 된 것을 이야기해 보세요.

(배영으로부터 남경까지의 거리를 알아보니 198200000km로 엄청나게 길다.)

(뉴스를 찾아보니 배영이 198200000km를 달렸다.)

본 차시에서 학습한 개념 및 원리를 정리하기 위해서 ‘개념 콕’을 활용하였다. ‘개념 콕’은 주로 ‘개념 쏙’ 활동의 다음에 배치하여 학습한 내용의 핵심을 정리하도록 구성하였다.

개념 콕

**다섯 자리 수를 알아볼까요?**

세로로 읽는 법을 알아보고 5개의 수를 찾아주세요.  
 세로로 읽는 법을 알아보고 5개의 수를 찾아주세요.

**1** 세로로 읽는 법을 알아보고 5개의 수를 찾아주세요.

35476은 일만천원의 수인지 수 커드를 사용하여 알아보세요.

35476은 일만천원의 수인지 수 커드를 사용하여 알아보세요.

35476은 일만천원의 수인지 수 커드를 사용하여 알아보세요.

35476은 어떻게 읽어야 할까요?

10000이 3개, 1000이 5개, 100이 4개, 10이 2개, 1이 6개인 수를 35476이라 쓰고 **삼만 오천사백칠십육**이라 읽고 읽습니다.

‘재미있는 수학’은 친구와 하는 활동을 기반으로 놀이를 통해 학습한 내용을 재미있게 해결해 볼 수 있도록 구성하였다.

재미있는 수학

**3** 만화화 영화의 수를 비교해 봅시다.

- 만화화 영화의 수를 비교해 보세요.

만화화					영화				
천	백	십	일		천	백	십	일	

- 두 수의 크기를 비교하는 방법을 생각해 보세요.

**4** 두 수의 크기를 비교하여 ○ 안에 >, =, < 중 알맞은 것을 써넣어 봅시다.

34257 ○ 34527      1241520000 ○ 954370000

26억 6980만 ○ 5억 7950만      4조 780만 ○ 6억 790만

**재미있는 수학** 친구와 함께 큰 수를 만들어 봅시다.

1. 친구와 함께 큰 수를 만들어 봅시다.

2. 친구와 함께 큰 수를 만들어 봅시다.

3. 친구와 함께 큰 수를 만들어 봅시다.

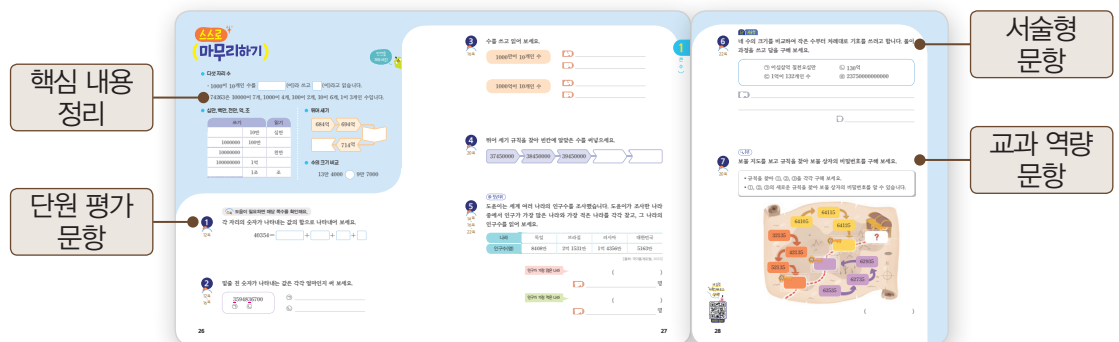
## 다. 창의가 반짝 역량이 쑥쑥

‘창의가 반짝 역량이 쑥쑥’은 창의적 문제해결 능력과 수학 교과 역량을 기를 수 있도록 구성하였다. 첫 번째 문제에서는 주로 학습한 내용을 새로운 상황에 적용해 볼 수 있고, 두 번째나 세 번째 문제에서는 학생들이 학습 내용을 창의적으로 구성해 볼 수 있는 기회를 제공하였다.



## 라. 스스로 마무리하기

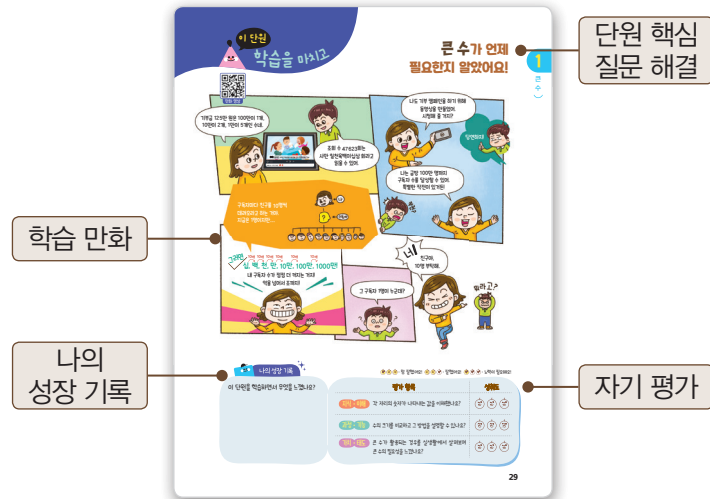
단원 평가 역할의 ‘스스로 마무리하기’는 학생들이 단원에서 학습한 내용을 스스로 정리할 수 있도록 핵심 내용 정리를 구성하였다. 또한 단원별 핵심 학습 내용에 대한 기본 문항뿐만 아니라 교과 역량 문항, 서술형 문항 등 다양한 난이도와 형식으로 문제를 제시하였다. 또 평가 문항별로 본 차시 쪽수를 제시하여 문제해결에 어려움이 있는 학생들이 관련 차시로 돌아가 도움을 받을 수 있도록 하였다. 이러한 단원 평가 문항을 통해 기본적인 수학 학습 수준을 점검하고 수학 교과 역량을 기를 수 있도록 하였다.



## 마. 이 단원 학습을 마치고

학습 만화는 단원 도입의 핵심 발문과 맥락을 다시 한번 정리해 준다. 또한, 나의 성장 기록에는 학습을 통해 새롭게 알게 된 내용을 필기하는 공간으로 활용하여 단원 학습을 시작할 때보다 얼마나 성장하였는지 스스로 성찰할 수 있는 기회를 제공하였다. 또한, 단원을 마무리한 후 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도의 측면에서 스스로를 평가해 볼 수 있도록 하였다.





### 3 수학을 잇기

‘수학을 잇기’는 두 단원마다 이전까지 학습한 내용을 융합적인 관점에서 해결해 보는 기회를 제공한다. 즉, 덧셈과 뺄셈, 평면도형 등 수학적 내적 연결과 더불어 국어, 미술, 체육 등 다른 교과와 연결하여 창의적인 학습이 이루어질 수 있도록 하였다.

‘수학을 잇기’의 구성은 다음과 같다.



[그림 3-4] ‘수학을 잇기’의 구성 체계

‘생각 열기’에서는 타 교과에서 수학 내용이 어떻게 활용되고 있는지 실생활과 관련된 맥락이 제시된다. ‘수학 되돌아보기’에서는 ‘수학을 잇기’ 프로젝트 활동에 필요한 수학 학습 내용이자, 이전 단원에서 학습한 수학 내용을 되돌아본다. ‘협력하여 만들기’는 모둠 활동으로 이루어지고 친구들과 협력하여 프로젝트를 수행한다. 마지막으로 ‘평가하기’는 활동을 통해서 새롭게 알게 된 점이나 느낀 점에 대해서 탐색할 수 있다.



## ② 수학익힘의 구성 체제와 활용 방안

### 1 수학익힘 구성 개요

“수학익힘”은 “수학”에서 학습한 내용을 다양한 소재와 상황을 통해 적용할 수 있도록 하여 배움을 익히는 데 목적이 있다. 따라서 교실에서 차시 학습을 마무리한 후에 교사의 재량에 따라 추가적인 자료로 활용을 할 수 있다. 단원을 학습한 후에 ‘자신감이 자라는 문제’를 통해 학생들은 맞춤형 문제를 활용할 수 있다. 또한, 가정에서도 자기주도적으로 학습할 수 있도록 한눈에 보기 쉬운 정답과 친절한 풀이를 제공한다.

“수학익힘”의 전반적인 구성은 다음과 같다.



[그림 3-5] “수학익힘”의 구성 체계

### 2 수학익힘의 단원별 구성 체제와 활용 방안

각 단원별로 “수학익힘”의 구성 체제는 다음과 같다.



[그림 3-6] “수학익힘”의 단원별 구성 체계

#### 가. 스스로 준비 학습

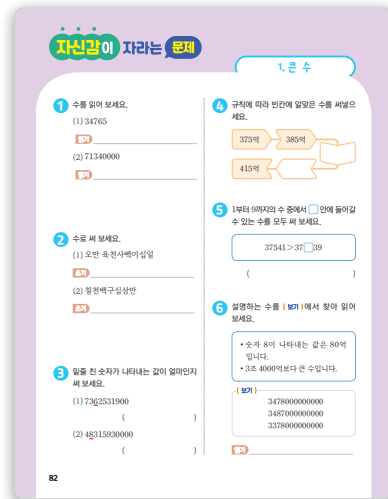
선수 학습 내용을 참고하여 스스로 문제를 해결할 수 있게 하여 자기 주도적 학습이 가능하다. 단순 연산 문제뿐만 아니라 문장제와 같이 다양한 유형의 문제를 해결하는 경험을 통해 핵심적으로 알아야 할 수학적 지식과 기능을 돌아보고, 본 단원 학습을 준비할 수 있도록 구성하였다. 필요한 경우 “수학”의 ‘준비하기’와 연계하여 활용할 수 있다.





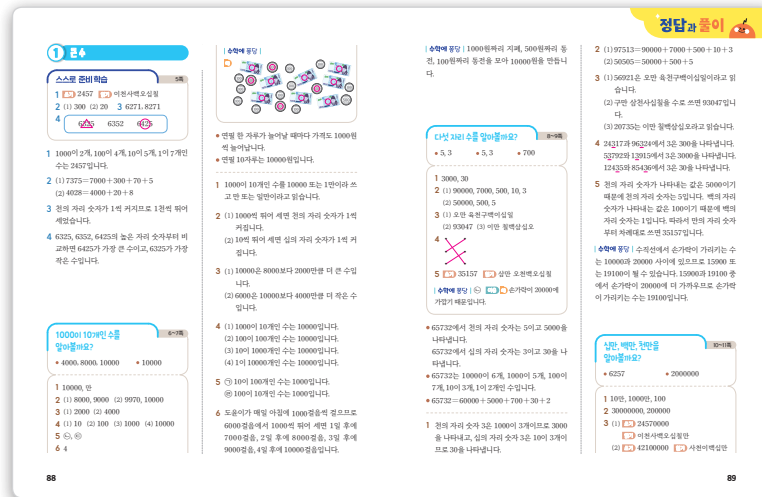
### 3 자신감이 자라는 문제

“수학익힘”의 마지막에는 단원에서 배운 내용을 학생들의 수준에 맞게 추가적으로 해결할 수 있도록 ‘자신감이 자라는 문제’를 구성하였다. 문제 순서는 난이도를 기반으로 제시되어 있고, 스스로 문제를 풀어 보는 과정을 통해 정의적 영역인 수학적 자신감을 신장할 수 있도록 구성하였다.



### 4 정답과 풀이

“수학익힘”에 제시된 모든 문제의 정답과 상세한 풀이를 제시하여 자기 주도적 학습이 가능하게 하였다.



### ③ 수학 교사용 지도서의 구성 체제와 활용 방안

#### 1 지도서 구성의 개요

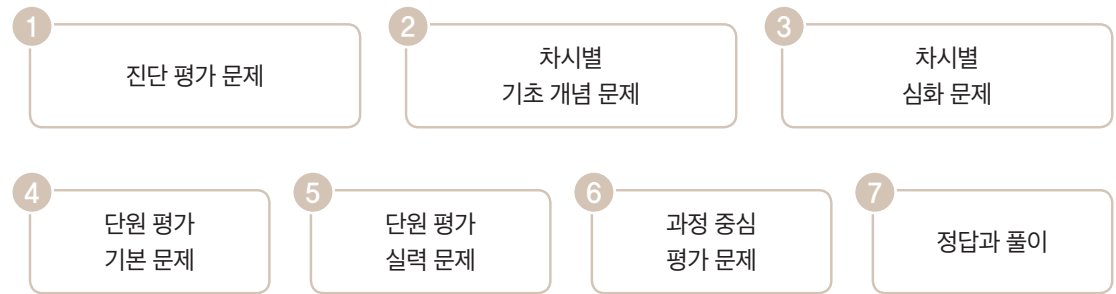
##### 가. 총론(수학과 교육의 이해)

2022 개정 수학과 교육과정	초등학교 수학과 교수·학습 및 평가	수학과 교과용 도서의 구성 체제와 활용 방안	학기별 지도 계획
<ul style="list-style-type: none"> <li>- 교육과정 원문</li> <li>- 교육과정에 대한 해설</li> <li>- 기초 소양 및 수학 교과 역량</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 교수·학습</li> <li>- 수학과 수업 모형</li> <li>- 초등학교 수학과 평가</li> <li>- 온오프라인 교육 환경에서의 교수·학습 및 평가</li> <li>- 수학 도구, 공학 도구, 게임의 활용</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 수학</li> <li>- 수학익힘</li> <li>- 교사용 지도서</li> <li>- 전자저작물</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 단원별 성취기준</li> <li>- 차시별 학습 목표</li> <li>- 차시별 학습 주제</li> <li>- 수학과 수학익힘 쪽수</li> <li>- 준비 자료</li> </ul>

##### 나. 각론(단원별 내용)

단원 학습에 필요한 내용	단원 개요	학생 성장을 지원하는 교수·학습 과정안 예시	단원 배경지식
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 단원 개관</li> <li>- 단원 계열</li> <li>- 교육과정(성취기준/성취기준 해설/성취기준 적용 시 고려 사항)</li> <li>- 단원 학습 목표</li> <li>- 단원 전개 계획</li> <li>- 단원 지도 및 평가 시 유의 사항</li> <li>- 단원 학습 평가 계획</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 원격 교수·학습 과정안</li> <li>- 학습 과정을 중시하는 평가를 담은 교수·학습 과정안</li> <li>- 맞춤형 교수·학습 과정안</li> <li>- 창의적 문제해결 교수·학습 과정안</li> <li>- 에듀테크, 공학 도구 활용 교수·학습 과정안</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 중요한 이유</li> <li>- 알아야 할 수학 내용</li> <li>- 학생들이 갖기 쉬운 오개념</li> <li>- 학생의 눈높이에서 질문과 답변</li> </ul>
차시별 지도 내용	차시 운영 방안	교수·학습 과정	성장 지원·과정 중심 평가 방안
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 차시 학습 목표</li> <li>- 수업의 흐름</li> <li>- 준비 자료</li> <li>- 교수·학습 자료</li> <li>- 지도 목표와 유의점</li> <li>- 수학 교과 역량</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 차시 도입 활용 방법</li> <li>- 활동별 의도 및 교사·학생 문답 예시</li> <li>- 지도 팀(Tip)</li> <li>- 이런 활동도 있어요. (수준별 학습)</li> <li>- 참고 자료</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 성취기준</li> <li>- 수행 과제</li> <li>- 평가 목표와 교과 역량</li> <li>- 평가 방식</li> <li>- 평가 내용, 수행 정도, 평가 후 지도 방안</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>- 수학익힘 해결</li> <li>- 차시 확인 문제</li> </ul>

## 다. 교수·학습 자료



## 2 지도서 구성 체제와 활용 방안

### 가. 총론

#### (1) 2022 개정 수학과 교육과정 및 평가 기준

- 2022 개정 수학과 교육과정을 제일 앞부분에 제시하여 교사가 교육과정을 참조해야 할 때마다 쉽게 찾을 수 있게 하였다.
- 2022 개정 수학과 교육과정의 개정 방향, 문서 체제 및 영역별 주요 변화 내용, 교수·학습 및 평가의 방향 등을 상세히 서술하여 교사가 교육과정에 대한 이해를 높일 수 있게 하였다.
- 2022 개정 교육과정에서 강조하고 있는 기초 소양 및 수학과 교과 역량을 집중적으로 살펴보면 서 교육과정의 이해를 돕고자 하였다.

#### (2) 초등학교 수학 교과의 교수·학습 및 평가

- 수학 교육의 다양한 목적과 이에 대한 인식이 중요한 이유를 설명함으로써 교사가 먼저 왜 수학을 가르치고 배우는지에 대해서 생각할 수 있는 기회를 제공하였다.
- 초등학교에서 다루는 내용이나 예를 바탕으로 수학적 사고의 특성과 방법을 제시하여 교사가 다른 교과와 차별화된 수학적 사고의 특성과 방법을 이해하는 데 도움이 되도록 하였다.
- 초등학교 수학과 수업 모형별로 학습 단계를 제시하여 교사가 수업의 기본적인 방향이나 흐름을 파악하는 데 도움이 되도록 하였다.
- 초등학교 수학과 평가에서 2022 개정 교육과정의 평가 방향, 다양한 평가 방법, 과정을 중시하는 평가의 이해와 실제에 대해 상세히 서술하였다. 이를 통해 교사가 다양한 평가 방법을 이해하고 과정 중심 평가와 피드백 계획을 수립하며 실천하는 데 활용할 수 있다.
- 초등학교 수학 학습을 돕는 교구, 공학 도구를 활용한 사례를 안내하여 교사가 학습 내용과 학생 수준에 맞게 활용하는 방법을 파악하기 용이하도록 하였다.

#### (3) 수학과 교과용 도서의 구성 체제와 활용 방안

- “수학”, “수학익힘”, “수학 교사용 지도서”, “전자저작물” 각각에 대한 역할 및 활용 방안을 제시하였다.

#### (4) 학기별 지도 계획

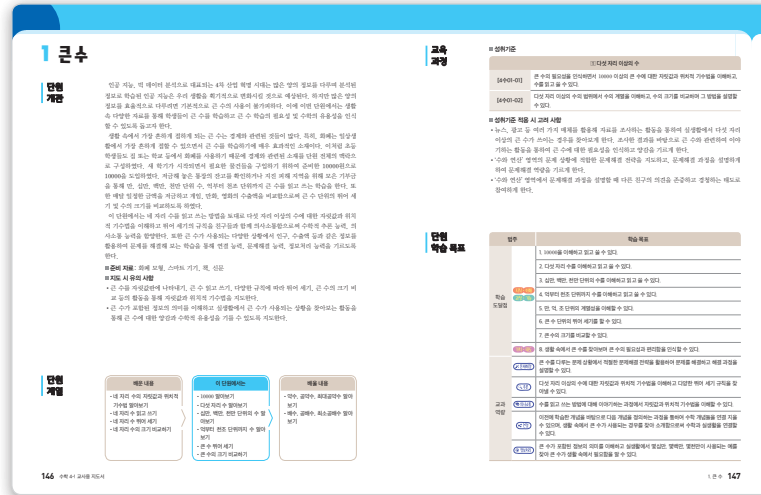
- 학기에 따른 단원, 성취기준, 학습 목표, 차시, 학습 주제, 수학·수학익힘 쪽수, 준비 자료를 상세히 제시하였다.



## 나. 각론

### (1) 단원 개요

- 단원 개관, 단원 계열, 단원과 관련된 2022 개정 수학과 교육과정, 단원 학습 목표, 단원 전개 계획, 단원 지도 및 평가 시 유의 사항, 단원 학습 평가 계획, 학생 성장을 지원하는 교수·학습 과정안 예시, 단원 배경지식을 제시하였다.



- 학생 성장을 지원하는 교수·학습 과정안 예시는 단원의 차시에 적절한 원격 교수·학습 과정안, 학습 과정을 중시하는 평가를 담은 교수·학습 과정안, 맞춤형 교수·학습 과정안, 창의적 문제해결 교수·학습 과정안 등의 예시를 담고 있어, 차시별 또는 테마별 교수·학습 시 참고할 수 있다.

### (2) 단원 도입



- 2022 개정 수학과 교육과정 내용 체계에서 이 단원에 해당하는 핵심 아이디어, 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 제시하였다.

- 차시 운영 방안과 교수·학습 과정을 제시하여 어떤 흐름으로 수업을 하면 좋을지 살펴보는 데 용이하도록 하였다.
- 이 단원과 연계된 범교과 학습 주제를 해설하여 단원 도입의 교수·학습 과정을 안내하였다.
- 이 단원을 학습할 때 가장 중요한 핵심 질문을 제시하고 단원 학습 내용을 흐름에 맞게 도식화 하여 안내함으로써 교사가 이 단원에서 어떤 내용을 학습하는지 시각적으로 살펴보기 좋게 구성하였다.
- 이 단원 학습을 위해 이미 알고 있어야 할 내용에 대해 “수학익힘” 각 단원 첫 쪽에 제시된 ‘스스로 준비 학습’ 및 ‘정답과 풀이’를 함께 제시하여 수업의 연계성을 높였다.

### (3) 본 차시

**차시 도입 활용 방법**

**학습 목표, 수업의 흐름, 준비 자료**

**교수·학습 자료**

**지도 목표와 유의점**

**수학 교과 역량**

이 차시 도입 활용 방법은 1000이 10개의 수를 알아볼까요?라는 주제로 구성되어 있습니다. 학습 목표, 수업의 흐름, 준비 자료, 교수·학습 자료, 지도 목표와 유의점, 수학 교과 역량, 추가 활동, 수학익힘과 연계, 확인 문제 등 다양한 내용을 포함하고 있습니다.

**성장 지원·과정 중심 평가 방안**

**수학익힘과 연계**

**확인 문제**

이 성장 지원·과정 중심 평가 방안은 1000이 10개의 수를 알아볼까요?라는 주제로 구성되어 있습니다. 학습 목표, 수업의 흐름, 준비 자료, 교수·학습 자료, 지도 목표와 유의점, 수학 교과 역량, 추가 활동, 수학익힘과 연계, 확인 문제 등 다양한 내용을 포함하고 있습니다.

- 본 차시는 크게 차시 운영 방안, 교수·학습 과정, 성장 지원·과정 중심 평가 방안, 수학익힘 지도로 구성하여, 차시별로 4쪽을 제시하였다.

- ‘학습 목표’, ‘수업의 흐름’, ‘준비 자료’, ‘지도 목표와 유의점’, ‘수학 교과 역량’ 등을 제시하였고, 수업의 흐름을 따라 자연스럽게 지도가 가능하도록 하였다.
- ‘교수·학습 자료’에서는 평가 관련 문제를 안내하여 학생 맞춤형 문제들을 활용할 수 있도록 하였다.
- ‘수학 교과 역량’에서는 차시별로 주요 교과 역량에 대해 어떤 교수·학습 과정을 통해 교과 역량을 기를 수 있는지 안내하여 교과 역량을 고려한 교수·학습 과정을 구현하는 데 도움이 되고자 하였다.
- ‘차시 도입 활용 방법’에서는 본 차시에 제시된 상황을 범교과 주제와 어떻게 연결하고 어떻게 활용할 수 있는지 방법을 안내하여 차시별 도입 상황을 교수·학습할 때 도움이 되고자 하였다.
- ‘추가 활동’을 제시하여 보충 학습이나 심화 학습이 필요한 경우 또는 대안적 활동을 활용할 수 있도록 하였다.
- ‘성장 지원·과정 중심 평가 방안’에서는 수업 중에 가능한 실질적인 수행 과제를 제시하고 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도를 고려하여 평가 내용과 기준을 참고할 수 있게 구성하였다. 또한 수행 정도에 따라 개별 맞춤 지도에 도움이 되도록 지도 방안을 제시하였다.
- “수학익힘”의 정답과 풀이 등을 제시하여 연계성을 높였다.
- ‘확인 문제’에서 이번 차시의 내용을 충실히 담은 추가 문제를 제시하여 활용도를 높였다.

#### (4) 창의를 반짝 역량이 쑥쑥

**창의적 역량  
키우기**

**학습 목표**

**창의적 문제  
해결을 위한  
수행 활동**

**역량을  
기르는 과정**

지도 목표와 유의점

수학 교과 역량

**역량과  
창의적 문제  
해결력 성장  
지원·과정  
중심 평가  
방안**

**수학익힘과  
연계**

지도 목표와 유의점

수학 교과 역량

- 생활 장면이나 에듀테크 활용 상황에서 창의적 문제해결을 경험하면서 다양한 문제해결 전략을 통해 문제해결력을 키우고 수학 교과 역량을 키울 수 있도록 구성하였다.
- ‘창의적 역량 키우기’에서는 창의적 요소를 고려하여 활동할 수 있게 안내하였다.
- ‘학습 목표’를 확인하고 ‘창의적 문제 해결을 위한 수행 활동’, ‘지도 목표와 유의점’을 제시하여 본 차시의 목표와 활동을 이해하는 데 도움을 주고자 하였다.
- ‘수학 교과 역량’에서는 이 차시에 반영된 3개의 주요 교과 역량에 대해 어떤 교수·학습 과정을 통해 교과 역량을 기를 수 있는지 안내하여 교과 역량을 고려한 교수·학습 과정을 구현하는 데 도움이 되고자 하였다.
- 역량을 기르는 과정에서는 학생들의 다양한 해결 방법이나 다양한 해결 결과를 끌어내기 위한 교사의 발문을 구체적으로 제시하고 수행 과제 해결의 다양한 예시를 담았다.
- ‘역량과 창의적 문제해결력 성장 지원·과정 중심 평가 방안’에서는 역량과 관련된 평가 목표와 창의성과 관련된 평가 목표와 내용을 제시하고 그에 따른 수행 정도에 따라 개별 맞춤 지도 방안을 제시하여 수업에서 이루어지는 평가와 피드백에 도움을 주고자 하였다.
- “수학익힘”에는 “수학”과 연계된 문제를 제시하고 창의적 해결 방안의 다양한 예시를 제공하였다.

## (5) 스스로 마무리하기

**단원 학습 개념 내용 분석**

**문항 분석**

교수·학습 자료

수학 교과 역량

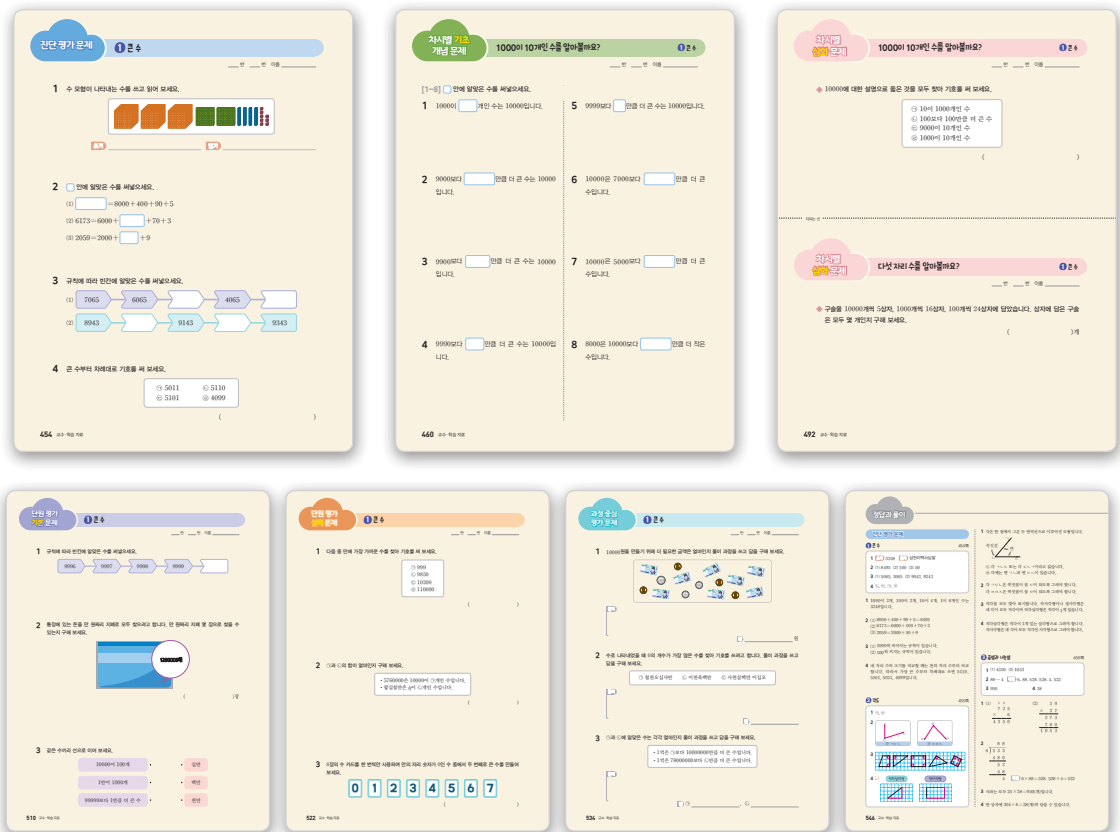
**교육과정 성취기준, 풀이, 평가 방법**

**이 단원 학습을 마치고**

**이 단원을 학습하고 나는 얼마나 성장했을까?**

- ‘단원 학습 개념 내용 분석’에서 이 단원에서 배운 내용과 차시 쪽수를 확인할 수 있다.
- ‘문항 분석’에서는 각 문항별로 어떤 내용을 평가하고 있는지 한눈에 볼 수 있다.
- ‘교수·학습 자료’에서는 지도서와 전자저작물에 제공된 ‘단원 평가 기본 문제’, ‘단원 평가 실력 문제’, ‘과정 중심 평가 문제’가 지도서 몇 쪽에 있는지 안내되어 있어 학생들에게 맞춤형 개별 평가와 피드백이 가능하도록 안내하고 있다.
- ‘수학 교과 역량’에서는 문항 중 교과 역량 표시가 되어 있는 문항에 대해서 어떤 교과 역량을 기를 수 있는지 안내하였다.
- 각 문항별로 해당되는 교육과정 성취기준, 풀이, 평가 내용과 평가 시 유의 사항 및 평가 후 지도 방안을 제시하여 지도에 실질적인 도움이 되고자 하였다.
- ‘참고 자료’가 있는 경우 QR로 확인하기 쉽도록 제시하였고, ‘이 단원 학습을 마치고’에서는 만화를 통해 학습할 내용을 제시하였다.
- ‘이 단원을 학습하고 나는 얼마나 성장했을까?’에서는 단원을 마무리하면서 학생들에게 자신의 수업 태도나 학습 과정을 되돌아볼 수 있는 기회를 제공하고, 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도 질문에 자기 평가를 해 볼 수 있도록 안내하고 있다.

## 다. 교수·학습 자료(학습지와 평가지)



교수·학습 자료는 교사가 선택적으로 활용할 수 있는 학습지와 평가지로 구성하였다. 학습지는 차시별로 이용할 수 있는 ‘차시별 기초 개념 문제’, ‘차시별 심화 문제’로 구성하였고, 평가지는 단원별로 이용할 수 있는 ‘진단 평가 문제’, ‘단원 평가 기본 문제’, ‘단원 평가 실력 문제’, ‘과정 중심 평가 문제’로 구성하였다.



## ④ 수학과 교과용 전자저작물의 구성 체제와 활용 방안

### 1 전자저작물의 구성 개요

수학과 교과용 전자저작물은 2022 개정 교육과정의 수학과 성격, 목표, 교과 역량, 교수·학습 방법 및 평가 방법에 따라 자료를 개발하여 수업의 질을 높이고 교사의 자유로운 교수 설계 지원을 목표로 구성하였다. 전자저작물은 “수학”, “수학익힘”, “수학 교사용 지도서”를 보완하고 유기적으로 연계하는 방향으로 개발하였으며, 교사가 교수·학습의 전개 과정에서 보조 자료로 활용하며 차시별, 단원별, 공통 자료 목록에 수록된 자료를 이용하거나 재구성하여 수업에 사용할 수 있도록 하였다.

### 2 전자저작물의 구성 체제

#### 가. 전자저작물의 첫 화면 구성

전자저작물의 첫 화면에서는 학기별 단원명과 단원별 차시명을 확인할 수 있고, 차시별로 전자책(e-Book) 또는 차시 수업으로 이동할 수 있도록 구성하였다. 또한, 다양한 교수·학습 및 평가 자료로 구성된 자료실, 게임을 기반으로 수학을 배우는 학습 놀이, 구체적 조작 활동을 통해 수학적 개념과 원리를 탐구할 수 있는 디지털 교구도 사용할 수 있다.



#### 나. 자료실

첫 화면에서 자료실을 선택하여 이동하면 교수·학습 시에 사용할 수 있는 다양한 차시별 자료와 단원별 자료, 공통 자료가 수록되어 있다.

##### (1) 차시별 자료

###### ① 수학 차시 수업 파워포인트(PPT)

“수학”의 각 차시별로 수업을 도와 주는 파워포인트(PPT) 자료이다. 학습 목표, 도입, 전개, 정리까지 수업에서 핵심적인 내용을 모두 제공하며 전자저작물의 첫 화면 구성에서도 접근 가능하다.

###### ② 수학익힘 차시 수업 파워포인트(PPT)

“수학익힘”의 각 차시별로 교수·학습을 도와주는 파워포인트(PPT) 자료이다. “수학익힘”에서 제시된 모든 문제의 정답을 확인할 수 있다.



### ③ 동영상

학습 개념 동영상, 학습 만화 동영상 등 수업에서 활용할 수 있는 다양한 종류의 동영상을 제공한다.

### ④ 평가 자료와 평가 도구

수준별 수업에 활용 가능한 차시별 기초 개념 문제와 차시별 심화 문제를 평가 자료로 사용할 수 있고, 차시별로 교사용 학생 평가지, 자기 평가지, 동료 평가지 등 다양한 평가 도구를 제공한다.

## (2) 단원별 자료

### ① 수업 자료

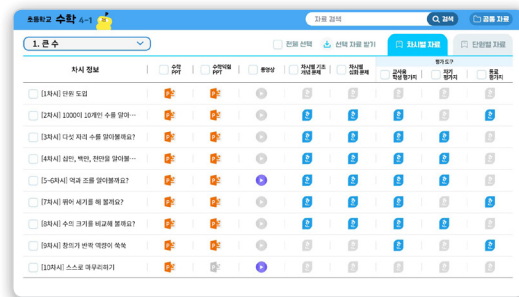
“수학”, “수학익힘”, “지도서” 피디에프(PDF)를 비롯하여 교과 역량 체크 리스트와 단원 준비물을 한글 파일로 제공한다.

### ② 평가 자료

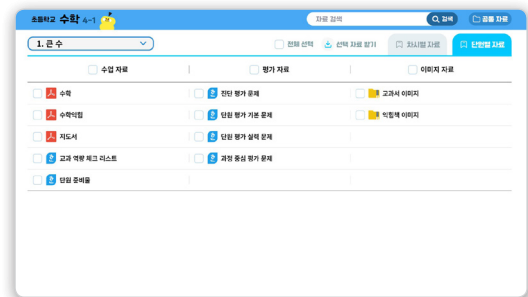
선수 학습에 사용할 수 있는 진단 평가 문제, 수준별 수업에 활용 가능한 단원 평가 기본 문제 및 단원 평가 실력 문제, 학습 과정을 증시하는 과정 중심 평가 문제를 제공한다.

### ③ 이미지 자료

“수학”, “수학익힘”에 사용된 이미지를 확인할 수 있다.



▲ 차시별 자료



▲ 단원별 자료

## (3) 공통 자료

교육과정 문서, 학기 준비물 등 학기별 공통 자료를 제공한다.

## 다. 학습 놀이(게임)

단원별로 학습한 내용을 게임을 통해서 정리해 볼 수 있는 학습 놀이를 구성하였다. 단원별 학습 내용을 되짚어 보고, 수학에 대한 흥미를 유발할 수 있다.



## 라. 디지털 교구

실물 교구의 한계점을 보완하여, 수학의 개념과 원리를 탐구할 수 있도록 다양한 디지털 교구를 구성하였다. 이러한 디지털 교구는 교사가 다양한 교구를 준비해야 하는 번거로움을 줄이고 학생들에게 교구 조작의 기능적 어려움을 줄여줌으로써 보다 학습에 집중할 수 있도록 도와준다.



## 마. 전자책(e-book)

“수학”, “수학익힘”을 전자책(e-Book) 형태로 제공한다. “수학”, “수학익힘”을 연계하여 함께 볼 수 있으며, 전자책 내에서 “수학”과 “수학익힘”의 차시 수업 자료 파워포인트(PPT)를 선택하여 이동할 수 있다. 또한 필요한 경우 교구함(자, 각도기, 삼각자 등)을 활용할 수도 있다.



# IV

## 학기별 지도 계획

2022 개정 교육과정에서 3~4학년군 수학과 수업 시수는 272시간이며 3~4학년 각 학기별로 68차시의 수업 시수가 확보된다. 2022 개정 초등학교 교육과정 편성·운영 기준에 따르면 각 학교는 3~6학년별로 지역과 연계하거나 다양하고 특색 있는 교육과정 운영을 위해 학교자율시간을 학교 여건에 따라 연간 34주를 기준으로 한 교과별 및 창의적 체험활동 수업 시간의 학기별 1주의 수업 시간을 확보하여 운영해야 한다. 따라서 학기별로 4차시의 수학 수업 시수를 학교자율시간 운영에 반영해야 하므로 4학년 1학기 수학 수업은 64차시로 개발하였다. 학교나 학급의 실정에 맞게 학습 시기, 단원별 시수 등을 변동하여 운영할 수 있다.

단원	성취기준	학습 목표	차시	학습 주제	수학 쪽수	수학익힘 쪽수	준비 자료
학기 초			1차시	4학년이 되었어요!	6~7쪽		
1. 큰 수	① 다섯 자리 이상의 수 [4수01-01] 큰 수의 필요성을 인식하면서 10000 이상의 큰 수에 대한 자릿값과 위치적 기수법을 이해하고, 수를 읽고 쓸 수 있다. [4수01-02] 다섯 자리 이상의 수의 범위에서 수의 계열을 이해하고, 수의 크기를 비교하며 그 방법을 설명할 수 있다.	1. 10000을 이해하고 읽고 쓸 수 있다. 2. 다섯 자리 수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다. 3. 십만, 백만, 천만 단위의 수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다. 4. 억부터 천조 단위까지 수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다. 5. 큰 수 단위의 뛰어 세기를 할 수 있다. 6. 큰 수의 크기를 비교할 수 있다. 7. 생활 속에서 큰 수를 찾아 보며 큰 수의 필요성과 편리함을 인식할 수 있다.	1차시	단원 도입	8~9쪽	5쪽	
			2차시	1000이 10개인 수를 알아볼까요?	10~11쪽	6~7쪽	화폐 모형
			3차시	다섯 자리 수를 알아볼까요?	12~13쪽	8~9쪽	
			4차시	십만, 백만, 천만을 알아볼까요?	14~15쪽	10~11쪽	화폐 모형, 스마트 기기
			5~6차시	억과 조를 알아볼까요?	16~19쪽	12~15쪽	스마트 기기, 책, 신문
			7차시	뛰어 세기를 해 볼까요?	20~21쪽	16~17쪽	
			8차시	수의 크기를 비교해 볼까요?	22~23쪽	18~19쪽	
			9차시	[창의가 반짝 역량이 쑥쑥] 다섯 고개로 큰 수 맞히기	24~25쪽	20쪽	
			10차시	[스스로 마무리하기]	26~29쪽		

단원	성취기준	학습 목표	차시	학습 주제	수학 쪽수	수학익힘 쪽수	준비 자료
2. 각도	Ⅰ 도형의 기초 [4수03-02] 각과 직각을 이해하고, 직각과 비교하는 활동을 통하여 예각과 둔각을 구별할 수 있다. Ⅱ 각도 [4수03-24] 각의 크기의 단위인 1도(°)를 알고, 각도기를 이용하여 각의 크기를 측정하고 어림할 수 있다. [4수03-25] 여러 가지 방법으로 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 추론하고, 자신의 추론 과정을 설명할 수 있다.	1. 각의 크기를 비교할 수 있다. 2. 각의 크기의 단위인 1도(°)를 알고, 각도기를 이용하여 각의 크기를 잴 수 있다. 3. 직각과 비교하여 예각과 둔각을 구별할 수 있다. 4. 각도를 어림하고 각도기로 재어 확인할 수 있다. 5. 각도의 합과 차를 구할 수 있다. 6. 삼각형의 세 각의 크기의 합이 180°임을 설명할 수 있다. 7. 사각형의 네 각의 크기의 합이 360°임을 설명할 수 있다. 8. 각도를 어림하고 측정하는 활동에 대한 흥미와 관심을 가진다.	1차시	단원 도입	30~31쪽	21쪽	
			2차시	각의 크기를 비교해 볼까요?	32~33쪽	22~23쪽	
			3차시	각의 크기를 재어 볼까요?	34~37쪽	24~25쪽	
			4차시	직각보다 작은 각과 직각보다 큰 각을 알아볼까요?	38~39쪽	26~27쪽	
			5차시	각도를 어림하고 재어 볼까요?	40~42쪽	28~29쪽	
			6차시	각도의 합과 차는 얼마일까요?	43~45쪽	30~31쪽	
			7차시	삼각형의 세 각의 크기의 합을 알아볼까요?	46~48쪽	32~33쪽	가위, 풀, 계산기
			8차시	사각형의 네 각의 크기의 합을 알아볼까요?	49~51쪽	34~35쪽	가위, 풀, 계산기
			9차시	[창의가 반짝 역량이 쑥쑥] 삼각자 2개로 만들 수 있는 각도	52~53쪽	36쪽	
			10차시	[스스로 마무리하기]	54~57쪽		
수학을 잇기		1. 의자의 다양한 정보를 보고 어떤 의자를 선택할지 토론할 수 있다. 2. 모둠 친구들과 협력하여 방을 꾸미고 꾸민 방을 발표하며 장점에 대해 이야기할 수 있다.	1~2차시	우리가 꿈꾸는 방을 만들어요.	58~61쪽		색연필, 사인펜, 가위, 풀
3. 곱셈과 나눗셈	Ⅲ 세 자리 수 범위의 곱셈 [4수01-04] 곱하는 수가 한 자리 수 또는 두 자리 수인 곱셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.	1. (세 자리 수) × (몇십), (세 자리 수) × (몇십몇)의 계산 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.	1차시	단원 도입	62~63쪽	37쪽	
			2차시	(세 자리 수) × (몇십)을 구해 볼까요?	64~65쪽	38~39쪽	
			3차시	(세 자리 수) × (몇십몇)을 구해 볼까요?	66~67쪽	40~41쪽	

단원	성취기준	학습 목표	차시	학습 주제	수학 쪽수	수학익힘 쪽수	준비 자료
3. 곱셈과 나눗셈	<p>㉔ 세 자리 수 범위의 나눗셈 [4수01-05] 나눗셈이 이루어지는 실생활 상황과 연결하여 나눗셈의 의미를 알고, 곱셈과 나눗셈의 관계를 이해한다. [4수01-07] 나누는 수가 두 자리 수인 나눗셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다. ㉕ 자연수의 어림셈 [4수01-08] 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 관련한 여러 가지 상황에서 어림셈을 할 수 있다.</p>	2. (세 자리 수) ÷ (몇십)의 계산 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.	4차시	(세 자리 수) ÷ (몇십)을 구해 볼까요?	68~69쪽	42~43쪽	수 모형
		3. 몫이 한 자리 수인 (두 자리 수) ÷ (몇십몇), (세 자리 수) ÷ (몇십몇)의 계산 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.	5차시	(두 자리 수) ÷ (몇십몇)을 구해 볼까요?	70~71쪽	44~45쪽	주사위
		4. 몫이 두 자리 수인 (세 자리 수) ÷ (몇십몇)의 계산 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.	6차시	(세 자리 수) ÷ (몇십몇)을 구해 볼까요?(1)	72~73쪽	46~47쪽	
		5. 나눗셈의 몫과 나머지를 구하고 계산 결과를 확인할 수 있다.	7차시	(세 자리 수) ÷ (몇십몇)을 구해 볼까요?(2)	74~75쪽	48~49쪽	
		6. 실생활과 관련된 곱셈과 나눗셈 문제를 함께 해결하는 과정에서 수학의 유용성을 느끼고 문제해결에서 비판적으로 사고하는 태도를 가질 수 있다.	8차시	[창의가 반짝 역량이 쑥쑥] 생활에서 즐기는 탄소 발자국	76~77쪽	50쪽	
			9차시	[스스로 마무리하기]	78~81쪽		
4. 삼각형	<p>㉔ 여러 가지 삼각형 [4수03-08] 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 이등변삼각형, 정삼각형을 이해하고, 그 성질을 탐구하고 설명할 수 있다. [4수03-09] 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 이해한다.</p>	1. 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 예각삼각형과 둔각삼각형을 이해할 수 있다.	1차시	단원 도입	82~83쪽	51쪽	
		2. 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 이등변삼각형과 정삼각형을 이해할 수 있다.	2~3차시	삼각형을 분류해 볼까요?	84~89쪽	52~55쪽	도형판, 색연필
		3. 이등변삼각형과 정삼각형의 성질을 탐구하고 설명할 수 있다.	4~5차시	이등변삼각형과 정삼각형의 성질을 알아볼까요?	90~93쪽	56~57쪽	스마트 기기
		4. 각의 크기와 변의 길이를 동시에 고려하여 삼각형의 여러 가지 이름을 찾을 수 있다.	6차시	이름이 여러 가지인 삼각형을 알아볼까요?	94~95쪽	58~59쪽	
		5. 삼각형 놀이, 그리기, 만들기 등을 하며 삼각형에 대한 흥미와 관심을 가진다.	7차시	[창의가 반짝 역량이 쑥쑥] 색종이의 변신	96~97쪽	60쪽	가위, 풀
			8차시	[스스로 마무리하기]	98~101쪽		
수학을 잇기		<p>1. 수학과 사회를 융합한 프로젝트를 해결할 수 있다.</p> <p>2. 모둠 친구들과 협의하여 수학적 요소가 포함된 창의적인 청동 거울 모형을 만들 수 있다.</p>	1~2차시	청동 거울을 만들어요.	102~105쪽		색연필, 사인펜

단원	성취기준	학습 목표	차시	학습 주제	수학 쪽수	수학익힘 쪽수	준비 자료
5. 막대 그래프	① 자료의 수집과 정리 [4수04-01] 자료를 수집하여 그림그래프나 막대 그래프로 나타내고 해석할 수 있다. [4수04-03] 탐구 문제를 해결하기 위해 자료를 수집, 정리하여 막대 그래프나 꺾은선그래프로 나타내고 해석할 수 있다.	1. 막대그래프의 특징을 알 수 있다. 2. 주어진 자료를 막대그래프로 나타낼 수 있다. 3. 막대그래프를 보고 여러 가지 통계적 사실을 해석할 수 있다. 4. 자료를 수집하여 막대그래프로 나타내고 해석할 수 있다. 5. 막대그래프의 편리함을 인식할 수 있다.	1차시	단원 도입	106~107쪽	61쪽	
			2차시	막대그래프를 알아볼까요?	108~109쪽	62~63쪽	
			3~4차시	막대그래프로 나타내어 볼까요?	110~115쪽	64~65쪽	스마트 기기
			5차시	막대그래프를 해석해 볼까요?	116~119쪽	66~67쪽	
			6~7차시	자료를 수집하여 막대그래프로 나타내어 볼까요?	120~123쪽	68~69쪽	도화지
			8차시	[창의가 반짝 역량이 쑥쑥] 잃어버린 문화유산 되찾기	124~125쪽	70쪽	
			9차시	[스스로 마무리하기]	126~129쪽		
6. 관계와 규칙	① 규칙을 수나 식으로 나타내기 [4수02-01] 다양한 변화 규칙을 찾아 설명하고, 그 규칙을 수나 식으로 나타낼 수 있다. [4수02-02] 계산식의 배열에서 규칙을 찾고, 계산 결과를 추측할 수 있다. ② 등호와 동치 관계 [4수02-03] 등호를 사용하여 크기가 같은 두 양의 관계를 식으로 나타낼 수 있다.	1. 크기가 같은 두 양의 관계를 등호를 사용하여 식으로 나타낼 수 있다. 2. 주어진 식이 옳은지 판단할 수 있다. 3. 수의 배열에서 규칙을 찾아 설명할 수 있다. 4. 모양의 배열에서 규칙을 찾아 설명할 수 있다. 5. 계산식의 배열에서 규칙을 찾아 다음에 이어질 계산식을 찾고, 계산 결과를 추측할 수 있다. 6. 친구들과 함께 규칙이 같은 새로운 모양의 배열을 만들어 봄으로써 규칙 찾기에 대한 흥미와 관심을 가진다.	1차시	단원 도입	130~131쪽	71쪽	
			2~3차시	크기가 같은 두 양의 관계를 식으로 나타내어 볼까요?	132~135쪽	72~73쪽	
			4차시	수의 배열에서 규칙을 찾아볼까요?	136~137쪽	74~75쪽	계산기
			5~6차시	모양의 배열에서 규칙을 찾아볼까요?	138~141쪽	76~77쪽	자석, 쌓기나무, 연결 큐브, 종이 빨대
			7~8차시	계산식에서 규칙을 찾아볼까요?	142~145쪽	78~79쪽	계산기
			9차시	[창의가 반짝 역량이 쑥쑥] 나만의 로봇 만들기	146~147쪽	80쪽	
			10차시	[스스로 마무리하기]	148~151쪽		계산기
수학을 잇기		1. 음악 산업과 관련된 자료에서 수학과 관련된 내용을 찾아 문제를 해결할 수 있다. 2. 4학년 1학기에 배운 수학 내용으로 가사를 만들어 수학 음악회를 열고 감상할 수 있다.	1~2차시	수학 음악회를 열어 보아요.	152~155쪽		스마트 기기
학기 말			1차시	4학년 1학기를 마무리해요.	156~159쪽		





## 참고 문헌

- 31쪽
- 교육부, “초·중등학교 교육과정 총론(교육부 고시 제2022-33호)”, 2022a, 4~5쪽
  - 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2015-74호)”, 2015, 3~4쪽, 25쪽
  - 김동원·홍진곤·김선희·신보미·김연·박진형·탁병주·황지현·왕효원·송창근, “2015 개정 수학과 교육과정 현장 실태 분석, 연구 보고 BD21010009”, 한국과학창의재단, 2020, 166~167쪽, 172~173쪽
  - 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호 [별책 8])”, 2022b, 3~4쪽
  - 교육부, “초·중등학교 교육과정 총론(교육부 고시 제2022-33호)”, 2022a, 4~5쪽
- 34~38쪽
- 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호 [별책 8])”, 2022b, 3~4쪽
- 38쪽
- 이경화·김동원·김선희·김혜미·김화경·박진형·이 호·이화영·임해미·장정욱·정종식·조성민·최인용·송창근, “포스트 코로나 대비 미래지향적 수학과 교육과정 구성 방안 연구 최종보고서”, 교육부, 2020, 177쪽, 236~237쪽
  - 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2015-74호)”, 2015, 3~4쪽, 25쪽
- 39쪽
- 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호 [별책 8])”, 2022b, 3~4쪽
- 41쪽
- 교육부, “초·중등학교 교육과정 총론(교육부 고시 제2022-33호)”, 2022a, 4~6쪽
  - OECD, “Future of Education and Skills 2030 Concept Note— Conceptual learning framework—LEARNING COMPASS 2030”, 2019, 24~25쪽
- 42쪽
- OECD, “The definition and selection of key competencies, Executive Summary”, OECD Publishing, 2005, 4쪽
  - 교육부(2015), “수학과 교육과정 (교육부 고시 제2015-74호 [별책8])”, 4쪽
  - 교육부, “초·중등학교 교육과정 총론(교육부 고시 제2022-33호)”, 2022a, 4쪽
  - 이경화·김선희·김남균·이명화·조성민·지영명·최성이·나귀수·임미인·최지선·탁병주·임해미·김보현·김부미·나미영·서보영·이윤경·정종식·강현영·고호경·장정욱·강은주·구나영·권숙학·김동재·김요민·김은하·김정현·김하림·박정숙·양정은·이경원·이상훈·전수경·전종삼·정중기·조장익·주미경·주신영·최은아·최인용·홍영범·송창근·김영준·이송희·박하은·곽지훈·강현석·이화영·김혜미·이 호, “2022 개정 수학과 교육과정 시안(최종안) 개발 정책 연구”, 한국창의재단, 2022, 13~16쪽
- 43쪽
- 김동원·홍진곤·김선희·신보미·김연·박진형·탁병주·황지현·왕효원·송창근, “2015 개정 수학과 교육과정 현장 실태 분석, 연구 보고 BD21010009”, 한국창의재단, 2020, 166~167쪽, 172~173쪽
- 45쪽
- 온정덕·김병연·박상준·방길환·백남진·이승미·이주연·한혜정·김진원·정현준, “2022 개정 교과 교육과정 개발 기준 마련 연구”, 경인교육대학교, 2021, 5~6쪽
  - OECD, “The future we want, The future of education and skills: Education 2030”, Author, 2018, 4쪽
  - 교육부, “2022 개정 교육과정 총론 주요사항”, 2021, 13쪽
- 46쪽
- 교육부, “초·중등학교 교육과정 총론(교육부 고시 제2022-33호)”, 2022a, 4~6쪽
  - 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호 [별책 8])”, 2022b, 3쪽
  - National Council of Teachers of Mathematics, “Principles to actions: Ensuring mathematical success for all”, 2014, 25쪽
- 47쪽
- Common Core State Standards Initiative, “Common Core State Standards for Mathematics”, 2010, 6~7쪽
  - 박선화·이명애·오상철·이영태·오택근·이경남, “기초학력 보장을 위한 문해력,수리력 진단도구 개발(Ⅰ) - 문해력, 수리력의 수준별 성취기준 개발을 중심으로-, 연구보고 RRI 2020-7”, 연구과정평가원, 2020, 106쪽
- 48쪽
- 이형주·고호경, “후기성인학습자를 위한 수리문해 프로그램 개발:수학교육 논문집(4)”, 2019, 519~536쪽
  - National Research Council, “Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.”, National Academies Press, 1989, 7~8쪽
  - OECD “Technical report of the survey of adult skills (PIAAC), 2nd Edition”, OECD Publishing, 2016, 1~4쪽
  - National Research Council, “Adding it up: Helping children learn mathematics”, National Academy Press, 2001, 116쪽
  - Goos, M., Dole., S., & Geiger, V. “Improving numeracy education in rural schools: A professional development approach”, Mathematics Education Research Journal 23(2), 2011, 129~148쪽, 130~132쪽
  - 김선희·이승미, “국가 교육과정에서 기초 학력으로서의 수리력 도입 방안. 수학교육 논문집, 34(2)”, 119~134쪽
- 49쪽
- National Curriculum Board, “Shape of the Australian curriculum: mathematics”, National Curriculum Board, 2009, 3~14쪽
- 50쪽
- Gilster, P., “Digital literacy”, John Wiley & Sons, 1997, 1~2쪽
  - 교육부, “초·중등학교 교육과정 총론(교육부 고시 제2022-33호)”, 2022a, 4~6쪽
  - 이운지·김수환·이은환, “디지털 리터러시 교육과정 프레임워크 개발 연구”, 교육연구논총 40(3), 2019, 201~221쪽
- 52~63쪽
- 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호 [별책 8])”, 2022, 3~49쪽
- 52~53쪽
- 강완·김상미·박만구·백석윤·오영열·장혜원, “초등수학교육론(제2판)”, 경문사, 2022, 2~7쪽
  - Heymann, H. W., “Why teach mathematics?: A Focus on General Education”, Kluwer Academic Publishers, 2023, 86~87쪽, 97쪽, 105쪽, 132~133쪽, 196쪽
- 55~56쪽
- 상경아·김경희·박상욱·전성균·박미미·이재원·민여준, “수학·과학 성취도 추이 변화 국제 비교 연구: TIMSS 2019 결과 분석”, 연구보고 RRE 2020-10, 한국교육과정평가원, 2020, 255~257쪽
  - Mullis, I. V. S.·Martin, M. O.·Foy, P.·Kelly, D. L.·Fishbein, B., “TIMSS 2019 International results in mathematics and science”, 2020, 443~445쪽
- 56쪽
- 서민희·김경희·이재원·전성균·김슬비·이빛나·민여준, “TIMSS 2019 결과 및 변화 추이 심층 분석”, 연구보고 RRE 2021-5, 2021, 361쪽

- 57~63쪽 • 강완·김상미·박만구·백석윤·오영열·장혜원, “초등수학교육론(제2판)”, 경문사, 2022, 236~244쪽
- 고은성·김상미·김성준·김수환·유현주·이동환·이종영·조영미, “초등수학 교과교육론”, 동명사, 2022, 53~76쪽
- 63~64쪽 • Cai, J.·Wang, T.·Wang, N.·Garber, T., “Effective mathematics teaching from teachers’ perspectives: National and cross-national studies”, Sense Publishers, 2009, 308~317쪽
- 63쪽 • National Center for Education Statistics, “Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study”, 2003, 1~222쪽
- 63~70쪽 • National Council of Teachers of Mathematics, “Principles to actions: Ensuring mathematical success for all”, 2014, 7~57쪽, 99쪽
- 63~64쪽 • 최승현·임찬빈, “수업평가 매뉴얼: 수학과 수업평가 기준”, 연구자료 ORM 2006-24-5, 한국교육과정평가원, 2006, 14~16쪽
- 65~70쪽 • Smith, M. S.·Stein, M. K., “5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions Second Edition, NCTM, 2018, 11~14쪽, 17~20쪽, 22쪽, 60쪽, 120~121쪽
- Pang, J., “Improving mathematics instruction and supporting teacher learning in Korea through lesson study using five practices”, ZDM Mathematics Education 48(4), 2016, 476~479쪽
- 65쪽 • Pang, J., “Good mathematics instruction in South Korea”, ZDM Mathematics Education 41(3), 2009, 358쪽
- 66쪽 • National Council of Teachers of Mathematics, “Professional standards for teaching mathematics”, 1991, 20쪽
- 66~67쪽 • Smith, M. S.·Bill, V.·Sherin, M. G., “The 5 practices in practice: Successfully orchestrating mathematics discussions in your elementary classroom”, Corwin Publishers, 2020, 38~50쪽
- 70쪽 • Pang, J.·Kwon, M. S., “Elementary and secondary school teachers’ perspectives of effective mathematics teaching”, Research in Mathematical Education 19(2), 2015, 149쪽
- 김원·임웅, “수학 교사 공동체 관련 국내 외 연구 동향”, 수학교육논문집 34(4), 2020, 439~440쪽
- 71쪽 • 김민환·추광재, “예비·현직 교사를 위한 수업 모형의 실제”, 박영Story, 2015, 35~38쪽, 346쪽
- 71~75쪽 • 남승인·류성림·권성룡·김남균·신준식·박성선·박만구·최근배·권점례·이종학, “2015 개정 교육과정에 의한 초등 수학 교육론”, 경문사, 2019, 189~210쪽, 231~246쪽
- 72쪽 • 교육부, “수학 지도서 2-2”, (주)천재교육, 2017, 61~62쪽
- 조성형·김홍찬, “언어적 관점에서의 수학적 용어와 기호 사용에 관한 지도 연구”, 교과교육연구 2(1), 2009, 59~81쪽
- 74쪽 • 강완·김상미·박만구·백석윤·오영열·장혜원, “초등수학교육론(제2판)”, 경문사, 2022, 242쪽
- 75~77쪽 • 강문봉·강홍규·권석일·김수미·남진영·박교식·박문환·서동엽·송상한·유현주·이종영·임재훈·정동권·정은실·정영옥, “초등 수학 교육의 이해”, 경문사, 2013, 118~128쪽, 145~146쪽
- 76쪽 • 황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽, “수학교육학신문”, 문음사, 2001, 45~55쪽
- 82쪽 • 성태제, “교육 평가의 기초”, 학지사, 2019, 24~25쪽, 64~65쪽
- 82~84쪽 • 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호 [별책 8])”, 2022, 3~49쪽
- 84~87쪽 • 교육부·한국교육과정평가원, “과정을 중시하는 수행 평가 어떻게 할까요?(초등)”, 연구 자료 ORM 2017-19-1, 2017, 26~28쪽
- 84쪽 • Sue Swaffield, “Getting to the heart of authentic Assessment for Learning”, Policy & Practice 18(4), Routledge, 2011, 433~449쪽
- 85~86쪽 • 이경화·강현영·고은성·이동환·신보미·이환철·김선희, “과정 중심 평가의 실행을 위한 방향 탐색”, 수학교육학연구 26(4), 대한수학교육학회, 2016, 819~834쪽
- 86쪽 • 김성숙·김희경·서민희·성태제, “교수 학습과 하나 되는 형성평가”, 학지사, 2015, 105~134쪽
- 강현영·고은성·이동환·이화영·탁병주·조진우·김선희, “수학과 과정중심평가 교사 연구 프로그램 개발 연구”, 수학교육학연구 28(3), 2018, 321~343쪽
- 87~92쪽 • 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호 [별책 8])”, 2022, 3~49쪽
- 90쪽 • 경기도교육청, “2024 초등 학습으로의 평가 이해하기”, 2024, 19쪽, 24쪽
- 93쪽 • 교육부, “초·중등학교 교육과정 총론(교육부 고시 제2022-33호 [별책1])”, 2022, 46쪽
- 교육부, “2021 초·중·고등학교 및 특수학교 원격수업 운영기준안”, 2021a, 2~5쪽
- 94쪽 • 교육부, “코로나-19 대응을 위한 교육과정 운영 예시 자료집 - 성취기준 재구조화·블렌디드러닝 수업 자료”, 2020a, 3~13쪽
- 94~95쪽 • 교육부, “2020년도 원격·등교수업 운영기준 톨아보기(초등)”, 2020b, 30~33쪽
- 95쪽 • 교육부, “코로나19 대응을 위한 2021학년도 원격수업 및 등교수업 출결·평가·기록 가이드라인(안)”, 2021b, 3~13쪽
- 96~97쪽 • 남승인·류성림·권성룡·김남균·신준식·박성선·박만구·최근배·권점례·이종학, “2015개정 교육과정에 의한 초등 수학 교육론”, 경문사, 2019, 249~251쪽
- 96~98쪽 • 최창우, 수학 교육과 교구, 경문사, 2014, 8~10쪽
- 안병곤, “초등학교 수학과 성취기준에 따른 수업용 교구의 효과적인 활용 방안”, 초등수학교육 21(1), 2018, 39~40쪽
- 96쪽 • 안병곤·강완·이경화·정경희·김홍규·정혜윤·최은성·김호경·박문환·백도현·이정·김봉준·남전형·이형미, “수학 수업용 교구 표준안 개발 연구”, 한국과학창의재단, 2016, 12~13쪽, 41~43쪽
- 교육부, “수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호 [별책 8])”, 2022, 3~49쪽
- 107쪽 • Mishra, P., & Koehler, M.J., “Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge”, Teachers College Record 108(6), 2006, 1028~1031쪽
- 107쪽 • Puentedura, R. R., “SAMR and TPACK: Intro to advanced practice.”, 2010, 3~12쪽
- 109~112쪽 • 알지오매스 키즈(<https://www.algeomath.kr/kids>)
- 113쪽 • 똑똑! 수학탐험대(<https://www.toctocmath.kr>)
- 114~115쪽 • 이지통계([https://www.ebsmath.co.kr/innovativelrms/web\\_lrms/content/resource/eleEasyTong/index.html](https://www.ebsmath.co.kr/innovativelrms/web_lrms/content/resource/eleEasyTong/index.html))

\* 집필진의 직접 집필인 경우 출처를 밝히지 않았음.